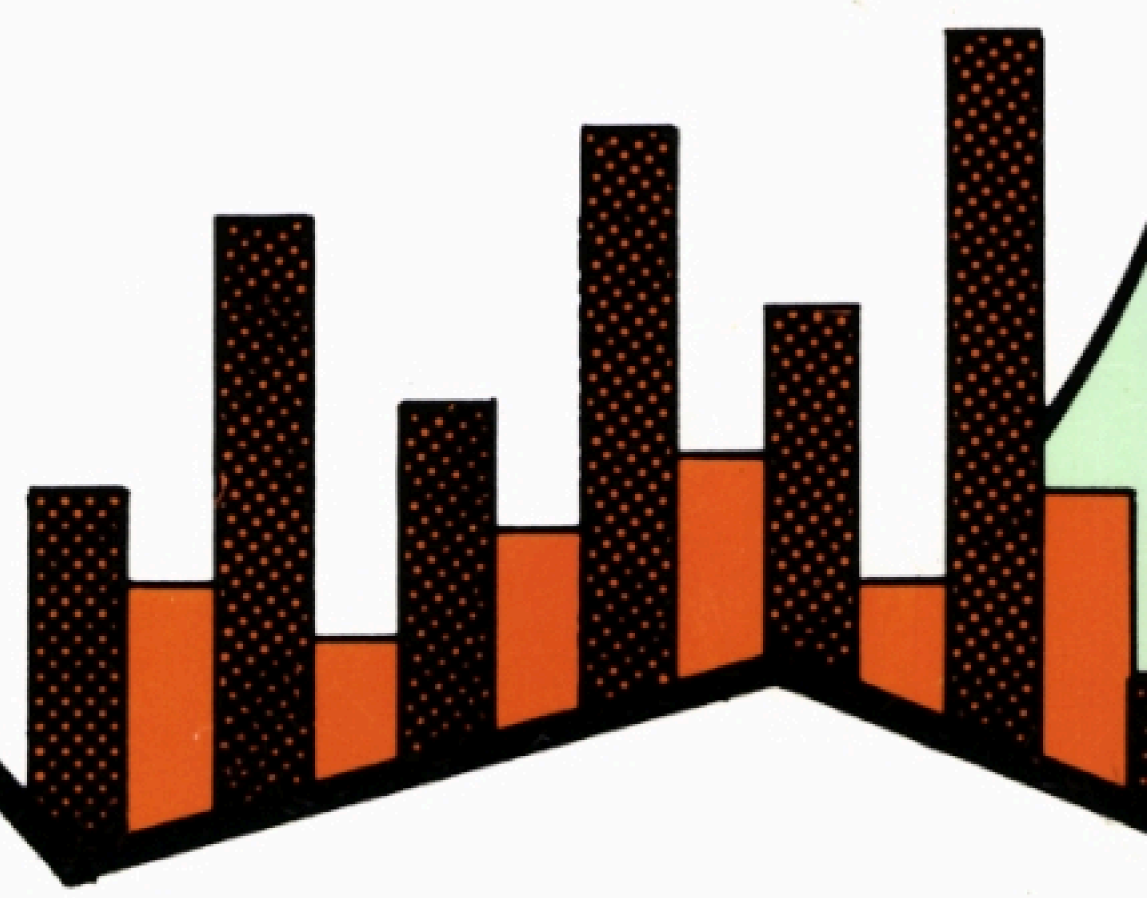
النظرية الاقتصادية

مدخل رياضي



الدكتور مختار محمد متولي

جامعة الملك سعود
عمادة شؤون المكتبات

بسم الله الرحمن الرحيم

النظرية الاقتصادية

مدخل رياضي

الدكتور مختار محمد متولي
أستاذ الاقتصاد بجامعة الملك سعود (سابقًا)
أستاذ الاقتصاد بجامعة وولنجنج بأستراليا (حاليًّا)

عمادة شؤون المكتبات - جامعة الملك سعود
ص ب ٢٢٤٨٠ - الرياض ١١٤٩٥ - المملكة العربية السعودية

الطبعة الأولى ١٤١٤هـ (١٩٩٣م)

٣٣٠,١٥٤٣ متولي، مختار محمد

٢٠٠م النظرية الاقتصادية، مدخل رياضي/ مختار محمد متولي. ـ ط١. ـ الرياض: جامعة الملك سعود، عمادة شؤون المكتبات، ١٤١٤هـ/١٩٩٣م

٤١٥ ص؛ ١٧×٢٤ سم

ردمك ٤ ـ ٠٤٢ ـ ٠٥ ـ ٩٩٦٠ (غلاف)

٢ ـ ٠٤٣ ـ ٠٥ ـ ٩٩٦٠ (جلد)

١ ـ الاقتصاد الرياضي ا ـ العنوان

رقم الإيداع: ١٤/٠٦١٥ بتاريخ ١٤١٤/٥/١٧هـ.

تم تحكيم الكتاب بوساطة لجنة متخصصة شُكِّلت بناءً على قرار المجلس العلمي في اجتماعه الثاني والعشرين للعام الدراسي ١٤٠٧/١٤٠٨هـ المعقود بتاريخ ١٤٠٨/٩/١هـ الموافق ١٩٨٨/٤/١٧م.

مطابع جامعة الملك سعود ١٤١٤هـ

تقديم

يهدف هذا الكتاب إلى إعطاء القارىء فكرة واضحة عن إمكانية الاستفادة من أسلوب التحليل الرياضي في فهم النظرية الاقتصادية الجزئية والكلية.

فلقد شاع استخدام الأسلوب الرياضي في التحليل الاقتصادي منذ زمن بعيد، وليس من المبالغ فيه القول بأنه قلما نجد بحثًا اقتصاديًا منشورًا في المجلات العالمية المعروفة يخلو من استخدام هذا الأسلوب.

فكثيرًا ما يساعد الأسلوب الرياضي في عرض القوانين والعلاقات الاقتصادية بطريقة أكثر وضوحًا من تلك التي يقدمها الأسلوب الوصفي، كما أن الأسلوب الرياضي غالبًا ما يساعد في التوصل إلى نتائج اقتصادية مهمة قد يكون من الصعب التوصل إليها باستخدام الأسلوب التقليدي غير الرياضي. أضف إلى ذلك أن الأسلوب الرياضي يساعد في تطوير النظرية الاقتصادية بفروعها المختلفة.

وترجع الزيادة المستمرة في الاعتماد على الأسلوب الرياضي في التحليل الاقتصادي إلى أن علم الاقتصاد يتميز عن غيره من العلوم الاجتماعية في احتوائه على الكثير من القوانين والقواعد العلمية التي تخضع لأسلوب التحليل الرياضي، كما أن سلوك الوحدات الاقتصادية المختلفة يمكن دراسته وتفسيره باستخدام الأسلوب القياسي الذي يعتمد على العلاقات والنماذج الرياضية، هذا بالإضافة إلى أن تحديد السياسات الاقتصادية الكلية التي تهدف إلى تحقيق الاستقرار والتوظف وعدالة توزيع

الدخل ونموه يتوقف على النماذج الاقتصادية التي يرسمها المخططون والتي تعتمد في صياغتها على الأساليب الرياضية.

هذا، وقد اتجهت جامعات كثيرة إلى الاستغناء كُلِّيَةً عن الأسلوب الوصفي التقليدي في شرح النظرية الاقتصادية، إذ اكتشف المتخصصون أن الأسلوب الرياضي يحقق العديد من المزايا في فهم وتطوير هذه النظرية، كما أن المنهج الرياضي قد أصبح سائدًا في دراسة فروع الاقتصاد المختلفة في مرحلة الدراسات العليا مما يستوجب ضرورة تدريب طلاب المرحلة الأولى على استخدام الرياضيات في التحليل الاقتصادي لضمان استيعابهم لمحتويات المواد في المراحل الدراسية المتقدمة ومساهمتهم في تطوير النظرية الاقتصادية باستخدام أسلوب البحث العلمي السليم.

ورغم كل هذا، نجد أن المكتبة العربية تفتقر إلى كتب النظرية الاقتصادية التي تعتمد على الأسلوب الرياضي، ونأمل في أن تسهم هذه الدراسة في سدِّ هذا القصور؛ إذ تعطي الصياغة الرياضية للنظرية الاقتصادية بشقّيها الجزئي والكلي، وبذلك يُبْرِزُ الكتاب كيفية استخدام الأسلوب الرياضي في شرح أهم عناصر التحليل الاقتصادي الجزئي والكلي ويوضح المعاني الرياضية للعلاقات الاقتصادية، إلا أنه يتميز عن غيره من الكتب في موضوعاته وشموليته وأسلوبه ومستواه.

فالكتب العربية المتوافرة في هذا الفرع من فروع الاقتصاد تستخدم إما الأسلوب الوصفي أو المدخل البياني في شرح النظرية الاقتصادية وإما تعطي بعض الأساليب الرياضية مع أمثلة تطبيقية لها لعدد محدود من موضوعات هذه النظرية، ولا يوجد حاليًّا باللغة العربية أية مرجع يعطي صيغة رياضية للنظرية الاقتصادية بأكملها وبفرعيها الجزئي والكلي.

كما أن هذا الكتاب لا يتناول بالشرح الموضوعات التقليدية فقط وإنما يحتوي أيضًا على بعض الإضافات العلمية التي أسهم بها المؤلف في بحوث نشرت في المجلات

الغربية المشهورة، كما أنه لا يقتصر على تقديم الأساسيات كما هو الحال بالنسبة لمعظم الكتب الجامعية المقررة، وإنما يتعمق في مضمون هذه الأساسيات ليضع في متناول القارىء مرجعًا يمكن الاستفادة منه في الإضافات للبحث العلمي.

ويتميز أسلوب هذا الكتاب بالتدرج في التعمق؛ إذ يبدأ كل موضوع بالأساسيات ثم يخطو تدريجيًا حتى يصل بالقارىء إلى مستوى التحليل المتقدم، وقد روعي في الكتاب إعطاء الإثباتات كافة بتفصيل تام، كما روعي إعطاء العديد من الأمثلة وكذلك بعض التمرينات لتدريب القارىء على استخدام الأسلوب الرياضي.

أما عن مستوى الكتاب فيلائم المراحل الجامعية المتقدمة والدراسات العليا؛ إذ يفترض أن للقارىء خلفية في مبادىء الاقتصاد وفي الأساليب الرياضية وخاصة حسابات المصفوفات والمحددات والتفاضل والتكامل والمعادلات التفاضلية ومعادلات الفروق والبرمجة الخطية وغير الخطية.

وينقسم الكتاب إلى بابين، فيتناول الباب الأول النظرية الاقتصادية الجزئية، بينما يتناول الباب الثاني النظرية الاقتصادية الكلية. وينقسم كل باب إلى سبعة فصول، ويحتوي في نهايته على قائمة مراجع في موضوعات البابين.

ونأمل حقًّا أن يجد القارىء في محتويات هذا الكتاب إضافة للمكتبة العربية، والله ولي التوفيق.

المؤلف

المحتويـات

الصفحـة

الصفحـة

الفصل الثالث. نظرية الإنتاج

الصفحة

الفصل الرابع . نظرية التكاليف

الفصل الخامس . توازن المنشأة

الصفحة

الصفحة

الصفحة

الصفحـة

الصفحـة

الباب الأول

النظرية الاقتصادية الجزئية

● أساسيات الطلب والعرض ● توازن المستهلك ● نظرية الإنتاج ● نظرية التكاليف ● توازن المنشأة ● توازن السوق ● جداول المدخلات والمخرجات

الفصل الأول

أساسيات الطلب والعرض

(١ ـ ١) دالة الطلب ودالة العرض

تتوقف الكمية التي تطلب من سلعة ما على عدد كبير من المتغيّرات أهمها سعر السلعة وأسعار السلع ذات الصلة (في الاستهلاك أو الإنتاج) ودخل المشتري وذوقه وثروته. وتعرف العلاقة التي تربط بين الطلب على السلعة وهذه المتغيّرات بدالة الطلب ويمكن التعبير عن هذه الدالة رياضيًّا فيما يلي:

$$x_1 = f(p_1, p_2, \ldots, p_n, M, T, W)$$

حيث:

x_1 = الكمية المطلوبة من السلعة خلال فترة زمنية معيّنة

p_1 = ثمن السلعة x_1

$p_2, \ldots, p_n$ = أثمان السلع الأخرى

M = الدخل

T = الذوق

W = الثروة

وإذا كانت السلعة x_1 سلعة عادية فإننا نحصل على:

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_1} < 0$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial M} > 0$$

أي أن الكمية التي يرغب الأفـراد شراءها خلال فترة زمنية معيَّنة تقل كلما زاد سعر السلعة مع ثبات العوامل الأخرى على ما هي عليه ، كما أن الكمية التي يرغب الأفراد شراءها خلال فترة زمنية معيَّنة تزداد كلما زاد دخل الفرد مع بقاء العوامل الأخرى على ما هي عليه [Marshall, 1980].

وإذا كانت السلعة رديئة ولكن ليست من نوع جفن فإننا نحصل على :

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_1} < 0$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial M} < 0$$

أي أن علاقة الطلب بكل من السعر والدخل تكون عكسية في حالة السلع الرديئة والتي ليست من نوع جفن ، وسوف يتضح مضمون هذه العلاقة فيما بعد عندما ندرس نظريات توازن المستهلك ونقوم باشتقاق معادلة سلوتكسي (Slutsky's) التي توضح الأثر الإحلالي والأثر الدخلي لتغيّر سعر السلعة .

أما إذا كانت السلعة من نوع جفن فإننا نحصل على :

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_1} > 0$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial M} < 0$$

أي أن قانون الطلب (والذي يعطي علاقة عكسية بين الكمية المطلوبة وسعر السلعة) لا يسري في حالة السلع من نوع جفن ، حيث تكون علاقة الطلب بالسعر في هذه الحالة علاقة طردية ، وتكون علاقة الطلب بالدخل علاقة عكسية [Wu, 1967].

وتتوقف الكمية التي يرغب البائعون عرضها في الأسواق خلال فترة زمنية معيَّنة

على عدد من العوامل أهمها سعر السلعة، وحالة التكنولوجيا، وعرض عناصر الإنتاج والعوامل الطبيعية (وخاصة في حالة السلع الزراعية) والضرائب والإعانات. وتعرف العلاقة التي تربط بين عرض السلعة وهذه المتغيّرات بدالة العرض، ويمكن التعبير عن هذه الدالة رياضيًّا كالآتي:

$$x_A = \phi\,(p_A, Z_1, \ldots, Z_n, N, G, H)$$

حيث:

x_A = الكمية المعروضة من السلعة خلال فترة زمنية معينة

p_A = ثمن السلعة x_A

$Z_1, \ldots, Z_n$ = عرض عناصر الإنتاج

N = متغير يمثل الأحوال الطبيعية

G = متغير يمثل الضرائب أو الإعانات

H = حالة التكنولوجيا

وليس من السهل تحديد ميل منحنى العرض كما هو الحال بالنسبة لمنحنى الطلب؛ حيث إن منحنيات العرض تأخذ أشكالاً مختلفة. فإذا كانت الصناعة تخضع لتزايد التكلفة نحصل على العلاقة:

$$\frac{\partial x_A}{\partial p_A} > 0$$

أي ينحدر منحنى العرض إلى أعلى نحو اليمين، وكثيراً ما يشار إلى هذا المنحنى بمنحنى العرض العادي.

أما منحنى العرض طويل الأجل للصناعة ذات التكلفة الثابتة فيكون خطًّا أفقيًّا

وعليه نحصل على :

$$\frac{\partial x_A}{\partial p_A} = \infty$$

بينما ينحدر منحنى العرض طويل الأجل للصناعة ذات التكلفة المتناقصة إلى أسفل نحو اليمين فنحصل على :

$$\frac{\partial x_A}{\partial p_A} < 0$$

وهناك أيضًا منحنى العرض المنعكس حيث يكون الميل موجبًا عند الأسعار المنخفضة وسالبًا عند الأسعار المرتفعة، كما أن منحنى عرض بعض السلع يميل إلى أن يكون خطًا رأسيا.

ويتحقق التوازن عند نقطة تقاطع منحنى الطلب مع منحنى العرض، فإذا ارتفع السعر عن المستوى التوازني زادت الكمية المعروضة عن الكمية المطلوبة مما يحدث فائضًا في الأسواق فيضطر البائعون إلى تخفيض السعر ليتخلصوا من هذا الفائض فينخفض السعر حتى يصل إلى المستوى التوازني، وإذا انخفض السعر لأقل من مستواه التوازني سوف تزداد الكمية المطلوبة على الكمية المعروضة فيحدث نقص في توافر السلعة مما يؤدي إلى رفع السعر إلى أعلى حتى يصل إلى مستواه التوازني، ومن ثم إذا بعد *السعر* عن المستوى التوازني فإنه يعود إليه بفعل قوى السوق وتعرف هذه الظاهرة باسم «توازن فالراس (Walrasian) المستقر».

ولو افترضنا أن الكمية كانت أكبر من المستوى التوازني فإن معنى ذلك أن السعر الذي يطلبه البائعون يزيد على السعر الذي يرغب المشترون في دفعه. فتقل رغبة المشترين في الشراء مما يؤدي إلى نقص في الكمية حتى تصل إلى المستوى التوازني. ولو كانت الكمية أقل من المستوى التوازني فإن الثمن الذي يرغب المشترون في دفعه يكون

أعلى من ذلك الذي يرغب البائعون الحصول عليه مما يزيد من حركة البيع فتزداد الكمية حتى تصل إلى المستوى التوازني؛ ومن ثم إذا بعدت *الكمية* عن المستوى التوازني فإنها تعود إليه بفعل قوى السوق. وتعرف هذه الظاهرة باسم «توازن مارشال (Marshallian) المستقر».

إلا أن استقرارية التوازن تتوقف على ما إذا كان كل من منحنى الطلب ومنحنى العرض ذا ميل عادي (أي إذا ما كان منحنى الطلب يتجه إلى أسفل نحو اليمين بينما يتجه منحنى العرض إلى أعلى نحو اليمين)، وعلى ما إذا كانت القيمة المطلقة لميل منحنى الطلب أكبر أو أقل أو مساوية لميل منحنى العرض.

فإذا كان ميل منحنى الطلب أو ميل منحنى العرض أو ميل كل منهما غير عادي فإن استقرارية التوازن عند فالراس لن يقابلها استقرارية توازن عند مارشال وبالعكس، ولكن يجب ملاحظة أن تحليل فالراس الخاص بتكييف السعر لتحقيق التوازن تحليل قصير الأجل، إلا أن تحليل مارشال يفترض أن المنتجين يقومون بتغيير الكميات المنتجة استجابة لتغيرات السعر؛ ومن ثم فهو تحليل طويل الأجل.

كما يتوقف تحليل التوازن المستقر على إدخال عنصر الزمن في التحليل فلو افترضنا وجود فترات تباطىء فإنه من الممكن أن نحصل على تقلبات حول السعر التوازني، وهذه التقلبات قد تتلاشى تدريجيًا أو تنفجر أو تستمر حول السعر التوازني ويتوقف ذلك على العلاقة بين القيمة المطلقة لميل منحنى الطلب وميل منحنى العرض. وسوف نعالج هذا الموضوع بالتفصيل في الفصل السادس عند دراستنا لديناميكية السوق وشروط الاستقرارية.

(١ ـ ٢) المرونـات

إذا كانت دالة الطلب :

$$q = f(p)$$

حيث q = الكمية المطلوبة

p = السعـر

فإن مرونة الطلب السعرية تعرف كالآتي :

$$\eta_p = \frac{d \ln q}{d \ln p}$$

$$\eta_p = \frac{\frac{1}{q}\, dq}{\frac{1}{p}\, dp}$$

$$\eta_p = \frac{dq}{dp}\frac{p}{q}$$

ولما كان ميل منحنى طلب السلع العادية سالبًا فإننا نسبق معامل المرونة بإشارة سالبة لنحصل على قيمة موجبة لمرونة الطلب أي :

$$\eta_p = -\frac{dq}{dp}\frac{p}{q}$$

(١ ـ ٢ ـ ١) مرونة الطلب السعرية لبعض المنحنيات

(i) إذا كان الـطلب خطًّا مستقيمًا ينحـدر إلى أسفـل نحو اليمين فإن مرونته لا تكون ثابتة عند كل نقطة عليه .

فلو افترضنا دالة الطلب :

$$q = a - bp$$

حيث :

a, b ثوابت : $a > 0; b > 0$

فإن :

$$\eta_p = \frac{bp}{q}$$

وواضح أن قيمة η_p تتغيّر تبعًا لقيم $\frac{p}{q}$.

(ii) إذا كانت *السلعة* من *نوع جفن* وكان الطلب عليها خطًّا مستقيمًا ينبع من نقطة الأصل فإن مرونته تساوي سالبًا واحدًا صحيحًا عند كل نقطة عليه ، أي أنه لو كان منحنى الطلب مساويًا :

$$q = a + bp$$

حيث :

$$b > 0, a = 0$$

فإن :

$$\eta_p = -1$$

(لاحظ أننا نسبق معامل المرونة بإشارة سالبة)

(iii) تكون مرونة الطلب السعرية للسلع العادية *ثابتة* عند كل نقطة على منحنى الطلب إذا أخذ هذا المنحنى الصيغة :

$$q = \alpha p^{-\beta}$$

حيث :

α, β ثوابت : $a > 0; \beta > 0$

إذ نحصل في هذه الحالة على :

$$\eta_p = \beta$$

وهو مقدار ثابت .

(iv) تكون مرونة الطلب السعرية للسلع العادية مساوية *لواحد صحيح* عند كل نقطة على منحنى الطلب إذا كان هذا المنحنى *قطعًا زائدًا قائمًا*، أي أنه إذا كان منحنى الطلب مساويًا :

$$q = \alpha p^{-1}$$

فإن :

$$\eta_p = 1$$

وتتوقف مرونة الطلب السعرية على عدة عوامل منها : مدى توافر السلع البديلة، واستخدامات السلعة، والقدر المنفق عليها من الدخل. ويقال إن الطلب مرن إذا كانت مرونته السلعية أكبر من واحد صحيح ويقال إنه غير مرن (أو قليل المرونة) إذا كانت مرونته السعرية أقل من واحد صحيح .

وإذا كانت دالة الطلب تأخذ الصيغة :

$$x_1 = \phi\,(p_1, p_2, \ldots, p_n, M, T, W)$$

حيث المتغيّرات كما سبق تعريفها، فإن مرونة طلب السلعة بالنسبة لسعرها تكتب كالآتي :

$$\eta_{x_1, p_1} = \frac{\partial \ln x_1}{\partial \ln p_1} = \frac{\partial x_1}{\partial p_1} \cdot \frac{p_1}{x_1}$$

(١ ـ ٢ ـ ٢) مرونة الطلب الدخلية

إذا كانت لدينا علاقة الطلب :

$$q = \psi\,(M)$$

حيث

q = الكمية المطلوبة

M = الدخـل

فإننا نعرف مرونة الطلب الدخلية كالآتي :

$$\eta_y = \frac{d \ln q}{d \ln M}$$

$$= \frac{dq}{dM} \frac{M}{q}$$

ونلاحظ أنه إذا كانت السلعة عادية فإن :

$$\eta_y > 0$$

أما إذا كانت السلعة رديئة فإن :

$$\eta_y < 0$$

وإذا كانت السلعة كمالية فإن مرونة الطلب الدخلية عليها تكون موجبة وأكبر من واحد صحيح أو:

$$\eta_y > 1$$

أما إذا كانت السلعة عادية وضرورية فإن مرونة الطلب الدخلية عليها تكون موجبة ولكن أقل من واحد صحيح أو:

$$\eta_y < 1$$

(١ ـ ٢ ـ ٣) مرونة الطلب التقاطعية

إذا كانت لدينا دالة الطلب الآتية :

$$x_1 = f(p_1, p_2, \ldots, p_n, M, T, W)$$

فإنه من الممكن أن نعرف مرونة الطلب التقاطعية بين السلعتين x_1 ، x_2 كالآتي :

$$\eta_{12} = -\frac{\partial x_1}{\partial p_2}\frac{p_2}{x_1}$$

وسوف نرى فيما بعد أن هذه المرونة تتوقف على مرونة الطلب الدخلية على السلعة x_1 وعلى النسبة من الدخل المنفقة على السلعة x_2 ، وعلى مرونة الإحلال بين السلعتين .

(١ - ٢ - ٤) مرونة الإحلال بين السلعتين

تعرف مرونة الإحلال بين سلعتين x_1 ، x_2 كالآتي :

$$\sigma_{12} = -\frac{d\left(\frac{x_1}{x_2}\right)}{\left(\frac{x_1}{x_2}\right)} \div \frac{d\left(\frac{p_2}{p_1}\right)}{\left(\frac{p_2}{p_1}\right)}$$

وسوف نشتق فيما بعد قيمة هذه المرونة عندما يكون المستهلك في حالة توازن ، ويلاحظ أنه :

(١) إذا كانت $\sigma_{12} > 0$ فإن السلعتين x_1 ، x_2 تكونان متنافستين .

(٢) إذا كانت $\sigma_{12} < 0$ فإن السلعتين x_1 ، x_2 تكونان مكملتين .

(١) إذا كانت $\sigma_{12} = 0$ فإن السلعتين x_1 ، x_2 تكونان محايدتين .

وسوف يتضح فيما بعد كيفية تحديد هذه العلاقات من شروط توازن المستهلك .

(١ - ٢ - ٥) مرونة العرض

إذا كانت دالة العرض تأخذ الصيغة :

$$x_A = f(p_A)$$

حيث x_A الكمية المعروضة وحيث p_A ثمن السلعة. فإن مرونة العرض تعرف كالآتي:

$$\eta_y = \frac{d \ln x_A}{d \ln p_A}$$

$$= \frac{dx_A}{dp_A} \cdot \frac{p_A}{x_A}$$

وعادة ما يكون هذا المعامل موجبًا؛ حيث إن معظم منحنيات العرض تنحدر إلى أعلى نحو اليمين، ويكون العرض مرنًا إذا كانت $1 < \eta$ ويكون غير مرن إذا كانت $\eta < 1$.

وإذا كان منحنى العرض خطًّا مستقيمًا ينبع من نقطة الأصل أي إذا كانت:

$$x_A = a + b\,p_A$$

حيث:

$$a = 0, b > 0$$

فإن مرونة العرض تساوي واحدًا صحيحًا على كل نقطة على منحنى العرض أو

$$\eta = 1$$

وسوف نرى فيما بعد أنه إذا كانت التكلفة نسبية لمستوى الإنتاج فإن منحنى العرض يصبح مرنًا مرونة لا نهائية أي أن:

$$\eta = \infty$$

وكما يعتقد الكثيرون فإن مرونة عرض بعض السلع الزراعية بالنسبة لأسعارها تقترب من الصفر، كما أن عرض هذه السلع يكاد يكون خطًّا رأسيًّا موازيًّا للمحور الصادي؛ أي أن:

$$\eta \simeq 0$$

(١ ـ ٢ ـ ٦) مرونة توقعات الأسعار

كثيرًا ما يربط الأفراد بين تغيّرات الأسعار الحالية وتوقعاتهم بالنسبة للتغيّرات المستقبلة، فإذا ارتفع سعر السلعة بمقدار ١٠ بالمائة مثلاً ونتيجةً لذلك غيّر الأفراد من توقعاتهم بالنسبة للارتفاعات المقبلة بمقدار ٣٠ بالمئة مثلاً فإن مرونة توقعات الأسعار تساوي ٣، وهكذا لو رمزنا لتغيّرات السعر الحالي بالرمز dp_c وللتغيّرات المتوقعة في السعر بالرمز dp_f فإن مرونة توقعات الأسعار تعرف كالآتي:

$$\epsilon = \frac{dp_f}{p_f} \div \frac{dp_c}{p_c}$$

وتؤدي هذه التوقعات إلى انتقالات في منحنى الطلب ويلاحظ الآتي:

(i) إذا كانت $0 > \epsilon$ فإن منحنى الطلب ينتقل إلى اليسار حيث يتوقع المشتري أن ارتفاع السعر الحالي سوف يتبعه انخفاض في الأسعار المستقبلة.

(ii) إذا كانت $0 = \epsilon$ فإن منحنى الطلب ينتقل إلى اليسار حيث يعتقد المشتري أن ارتفاع السعر الحالي لن يؤثر في الأسعار المستقبلة.

(iii) إذا كانت $1 > \epsilon > 0$ فإن منحنى الطلب سوف ينتقل إلى اليسار حيث يعتقد المشتري أن الارتفاع في السعر الحالي يكون ارتفاعًا مؤقتًا.

(iv) إذا كانت $1 = \epsilon$ فلن يحدث أي انتقال في منحنى الطلب حيث يتوقع المشتري أن ارتفاع السعر الحالي يكون له صفة الدوام.

(v) إذا كانت $1 < \epsilon$ فإن منحنى الطلب ينتقل إلى اليمين حيث يتوقع المشتري استمرار ارتفاع السعر.

(١ ـ ٣) العلاقة بين الإيراد الحدِّي ومرونة الطلب السعرية

لو افترضنا دالة الطلب الآتية:

$$q = f(p)$$

حيث q تمثل الكمية المطلوبة وحيث p تمثل السعر فإن الإيراد الكلِّي يساوي:

$$R = p \cdot q$$

ويكون الإيراد الحدِّي مساويًا:

$$MR = \frac{d}{dq}(p.q)$$

$$= q\frac{dp}{dq} + p$$

$$MR = p\left(\frac{q}{p}\frac{dp}{dq} + 1\right)$$

لكن مرونة الطلب السعرية تساوي

$$\eta = -\frac{dq}{dp}\frac{p}{q}$$

وبالتعويض في معادلة الإيراد الحدِّي نحصل على:

$$MR = p\left(1 - \frac{1}{\eta}\right)$$

ويتضح من المعادلة الأخيرة أن:

$$\text{الإيراد الحدِّي} = \text{السعر}\left(١ - \frac{١}{\text{المرونة}}\right)$$

ويمكن أن نستنتج من هذه العلاقة أنه إذا كانت :

$\eta > 1$ فإن $MR > 0$

وإذا كانت :

$\eta < 1$ فإن $MR < 0$

بينما نجد أن :

$$MR = 0$$

إذا كانت :

$$\eta = 1$$

أي أن الإيراد الكلي يصل إلى نهايته العظمى عندما تكون المرونة مساوية ١ .

ويلاحظ أنه في حالة المنافسة الكاملة تكون :

$$\eta = \infty$$

وعليه نحصل في هذه الحالة على :

$$MR = p\,(1 - \frac{1}{\infty}) = p$$

أي أن السعر في حالة المنافسة الكاملة يساوي الإيراد الحدِّي .

(١ ـ ٤) السلع المرتبطة

إذا أدى تغيّر سعر سلعة ما إلى تغيّر في الكمية المطلوبة من سلعة أخرى فإن السلعتين تكونان مرتبطتين ؛ أي أن الكمية المطلوبة من أي سلعة تكون دالة ليس فقط لسعر السلعة محل البحث ؛ بل أيضًا لسعر السلعة الأخرى كما في الحالة الآتية :

$$x = f(p_x, p_y)$$
$$y = g(p_x, p_y)$$

يلاحظ هنا أن الكمية المطلوبة من السلعة x تكون دالة لسعر هذه السلعة p_x ، وسعر السلعة y ، أي p_y ، ويقال الشيء نفسه عن الكمية المطلوبة من السلعة y.

ومن المعـروف أنـه لو كانت السلعتان x ، y سلعًا عادية فإننا نتوقع التغيرات الحدية التالية :

$$\frac{\partial x}{\partial p_x} < 0$$
$$\frac{\partial y}{\partial p_y} < 0$$

أي أن طلب كل من السلعتين ينحدر إلى أسفل نحو اليمين (أي أن المنحنى يكون ذا ميل سالبٍ) .

ومن المعروف أيضًا أنه لو كانت السلعتان بديلتين (مثل اللحم والسمك)، فإن ارتفاع ثمن إحداهما سوف يؤدي إلى زيادة الطلب على الأخرى؛ أي أن العلاقة بين الطلب على السلعة المعيّنة وسنعر السلعة *البديلة* علاقة طردية ؛ فلو كانت السلعتان x ، y أعلاه سلعًا *بديلة* لحصلنا على :

$$\frac{\partial x}{\partial p_y} > 0$$
$$\frac{\partial y}{\partial p_x} > 0$$

أما لو كانت السلعتان متكاملتين (مثل الشاي والسكر) فإن ارتفاع ثمن إحداهما سوف يؤدي إلى نقص في الطلب على الأخرى؛ أي أن العلاقة بين الطلب على السلعة المعينة وبين سعر السلعة *المتكاملة* علاقة عكسية، فلو كانت السلعتان x ، y أعلاه سلعًا *متكاملة* لحصلنا على :

$$\frac{\partial x}{\partial p_y} < 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial p_x} < 0$$

يتضح مما تقدم أنه لو كانت إشارة المتغيّرات الحدِّية : $\frac{\partial y}{\partial p_x};\frac{\partial x}{\partial p_y}$ موجبة فإن لسلعتين تكونان *بديلتين* أو متنافستين، أما إذا كانت إشارة المتغيّرات الحدِّية : $\frac{\partial y}{\partial p_x},\frac{\partial x}{\partial p_y}$ *سالبة* فإن السلعتين تكونان *متكاملتين* وأما إذا كانت إشارات المتغيّرات الحدِّية : $\frac{\partial y}{\partial p_x},\frac{\partial x}{\partial p_y}$ عكسية؛ أي أن إحداهما سالبة والأخرى موجبة فإن السلعتين لا تكونان بديلتين أو متكاملتين.

مثال

نفترض أن دالة الطلب على سلعتين x, y هما :

$$x = \frac{p_y}{p_x} \quad ; \quad y = \frac{p_x^2}{p_y}$$

حيث يمثل p_x سعر السلعة x بينما يمثل p_y سعر السلعة y. والمطلوب تحديد ما إذا كانت السلعتان سلعًا عادية، ثم تحديد طبيعة العلاقة بينهما.

تعطي المتغيّرات الحدِّية بالنسبة لسعر السلع نفسها :

$$\frac{\partial x}{\partial p_x} = \frac{-p_y}{p_x^2} < 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial p_y} = \frac{-p_x^2}{p_y^2} < 0$$

ومن الواضح أن التغيّرات الحدِّية لكل سلعة بالنسبة لسعر السلعة نفسها سالبة؛ أي أن العلاقة بين الطلب على كل سلعة وسعر هذه السلعة علاقة عكسية، مما يدل على أن السلعتين تمثلان سلعًا عادية.

وتعطي المتغيّرات الحدِّية بالنسبة لسعر السلعة الأخرى:

$$\frac{\partial x}{\partial p_y} = \frac{1}{p_x} > 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial p_x} = \frac{2p_x}{p_y} > 0$$

ولما كانت هذه المتغيّرات تحمل الإشارة نفسها وكانت هذه الإشارة موجبة فإن السلعتين تمثلان سلعًا بديلة.

مثال

إذا كانت دوال الطلب على سلعتين x ، y (حيث p_x تمثل سعر السلعة x وحيث p_y تمثل سعر السلعة y) كالآتي:

$$x = a\,e^{-p_x p_y}$$

$$y = b\,e^{p_x p_y}$$

بافتراض أن $a > 0, b > 0$ ، فالمطلوب تحديد ما إذا كانت السلعتان تمثلان سلعًا عادية وما إذا كانت بديلة أو مكملة.

يعطي التغيّر الحدِّي للطلب بالنسبة لسعر السلعة نفسها كالآتي :

$$\frac{\partial x}{\partial p_x} = -a\, p_y\, e^{-p_x p_y} < 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial p_y} = -b\, e^{\,p_x - p_y} < 0$$

ويتضح من الإشارات أعلاه أن السلعتين تمثلان سلعًا عادية .

ثم يعطي التغيّر الحدِّي للطلب بالنسبة لسعر السلعة الأخرى كالآتي :

$$\frac{\partial x}{\partial p_y} = -a\, p_x\, e^{-p_x p_y} < 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial p_x} = b\, e^{\,p_x - p_y} > 0$$

ويتضح من هذه الإشارات أن السلعتين ليستا بديلتين أو متكاملتين .

وتجدر الإشارة هنا إلى أن قيمة e مرفوعة إلى أي أس تكون دائمًا موجبة ، وذلك لأن e مقدار موجب ، كما أن أي مقدار موجب مرفوع لأي أس يكون دائمًا موجبًا . فمثلاً : $e^{-2} > 0$ أما الكمية a^{-x} فتكون موجبة إذا كانت $a > 0$.

(١ ـ ٥) مرونات الطلب الجزئية والسلع المرتبطة

إذا كانت لدينا سلعتان x ، y ، وكانت دالة طلب كل منهما تتأثر بسعر السلعة الأخـرى، فإنه يمكن حساب مرونة الطلب الجزئية لكل منهما بالنسبة لسعر السلعة نفسها، وبالنسبة لسعر السلعة الأخرى [Johnson, 1984].

فلو افترضنا دالتي الطلب:

$$x = f\,(p_x, p_y)$$

$$y = g\,(p_x, p_y)$$

فإن مرونة الطلب الجزئية للسلعة x بالنسبة لسعرها (p_x) تساوي :

$$\eta_{x.p_x} = \frac{\partial x}{\partial p_x} \cdot \frac{p_x}{x} = \frac{\partial \ln x}{\partial \ln p_x}$$

وتكون مرونة الطلب الجزئية للسلعة y بالنسبة لسعرها (p_y) مساوية :

$$\eta_{y.p_y} = \frac{\partial y}{\partial p_y} \cdot \frac{p_y}{y} = \frac{\partial \ln y}{\partial \ln p_y}$$

أما مرونة الطلب الجزئية للسلعة x بالنسبة لسعر السلعة y (p_y) فتكون مساوية :

$$\eta_{x.p_y} = \frac{\partial x}{\partial p_y} \cdot \frac{p_y}{x} = \frac{\partial \ln x}{\partial \ln p_y}$$

بينما تكون مرونة الطلب الجزئية للسلعة y بالنسبة لسعر السلعة x (p_x) مساوية :

$$\eta_{y.p_x} = \frac{\partial y}{\partial p_x} \cdot \frac{p_x}{y} = \frac{\partial \ln y}{\partial \ln p_x}$$

مثال

نفرض أن دالتي الطلب لسلعتين x ، y هما :

$$x = \frac{a}{p_x^2 p_y} \quad , \quad y = \frac{a}{p_x p_y}$$

حيث تمثل p_x ثمن السلعة x ، وتمثِّل p_y ثمن السلعة y ، وحيث a مقدار ثابت موجب، فإنه يمكن حساب مرونات الطلب الجزئية كالآتي :

$$\eta_{x \cdot p_x} = -2$$
$$\eta_{y \cdot p_y} = -1$$
$$\eta_{x \cdot p_y} = -1$$
$$\eta_{y \cdot p_x} = -1$$

(على الطالب أن يستنتج الحل بالتفصيل) .

مثال

نفترض أن دالتي الطلب على سلعتين x ، y هما :

$$x = a\, e^{-p_x p_y}$$
$$y = b\, e^{p_x - p_y}$$

حيث p_x تمثل ثمن السلعة x ، p_y تمثل ثمن السلعة y وحيث $0 < a$ ، $b > 0$.

في هذه الحالة نحصل على مرونات الطلب الجزئية كالآتي :

$$\eta_{x \cdot p_x} = -p_x p_y$$
$$\eta_{y \cdot p_x} = -p_y$$
$$\eta_{x \cdot p_y} = -p_x p_y$$
$$\eta_{y \cdot p_x} = p_x$$

(١ - ٦) تمرينات

١) احسب مرونة الطلب بالنسبة للدوال الآتية:

$$q = \frac{3}{1 + 2p^2}$$

$$q = -(p-8)^2$$

$$q = 13\,e^{-(5/4)p}$$

$$p = 10/q^{5/4}$$

$$q = e^{-p^2} . \ln p^2$$

$$q = a\,e^{-kp}$$

٢) اثبت أن مرونة الطلب:

$$q = \frac{a}{p^m}$$

ثابتة عند كل نقطة على المنحنى.

٣) أثبت العلاقة بين الإيراد الحدِّي والمرونة لكل من دوال الطلب الآتية:

$$p = 550 - 3q + 6q^2$$

$$p = 3250 / q^3$$

$$p = 100 - 6q^2$$

٤) حدِّد بالنسبة لكل من دوال الطلب الآتية العلاقة بين السلعتين x, y ومرونات الطلب الجزئية بافتراض أن p_x تمثِّل ثمن السلعة x ، وأن p_y تمثل ثمن السلعة y.

$$x = 20 - 2p_x - p_y \qquad \ldots (i)$$

$$y = q - p_x - 2p_y$$

(ii)

$$x = \frac{4}{p_x^2\, p_y}$$

$$y = \frac{16}{p_x\, p_y^2}$$

(iii)

$$x = a\, e^{p_y - p_x}$$

$$y = b\, e^{p_y - p_x}$$

(iv)

$$x = a_1\, p_y{}^2 - b_1\, p_x\, p_y$$

$$y = a_2\, p_x{}^2 - b_2\, p_x\, p_y$$

علمًا بأن :

$$a_1, a_2, b_1, b_2 > 0$$

الفصل الثاني

توازن المستهلك

(٢ ـ ١) المدخل التقليدي

لقد شغلت مشكلة توازن المستهلك فكر الاقتصاديين لفترة طويلة من الزمن. ومازال الكثير من الباحثين يخصص جهدًا كبيرًا لحلِّ هذه المشكلة التي تتلخص في أن المستهلك الذي يملك دخلاً محدودًا يحاول أن ينفق هذا الدخل بين السلع والخدمات المختلفة بحيث يحقق أكبر قدر من الإشباع، علمًا بأنه لا يستطيع أن يؤثر في أسعار مشـترياتـه وطبقًا للمدخل التقليدي أو المدخل القياسي الذي يرجع إلى الاقتصادي مارشال Marshall فإن لكل مستهلك دالة منفعة حيث يستمد المستهلك منفعته من عدد الوحدات التي يحصل عليها من السلع المختلفة؛ أي أن دالة المنفعة يمكن التعبير عنها رياضيًّا كالآتي:

$$U = \phi\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

حيث تمثِّل U المنفعة الكلية، وتمثل x_1 ، x_2 ، . . . ، x_n الوحدات التي يحصل عليها المستهلك من السلع المختلفة.

وافترض مارشال أن المنفعة الحدِّية موجبة (حيث لا يفكر الفرد في شراء ما يسبب له ألمًا) أي أن:

$$MU_{x_j} = \frac{\partial U}{\partial x_j} \; > \; 0$$

حيث MU_{x_j} تمثِّل المنفعة الحدِّية للسلعة x_j.

وافترض مارشال تناقص المنفعة بمعنى أن الاستمرار في شراء سلعة ما سوف يؤدي إلى تناقص منفعتها الحدِّية أو أن :

$$\frac{\partial MU_{x_j}}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_j^2} < 0$$

كما افـترض مارشال أن المنفعة يمكن قياسها رقميًّا وأن منفعة السلع المختلفة مستقلة بعضها عن البعض الآخر.

فلو كان دخل المستهلك M وأسعار السلع المختلفة $p_1, p_2, \ldots, p_n$ حيث p_i يمثل سعر السلعة x_i ، فإن قيد الدخل يمكن التعبير عنه كالآتي :

$$M = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n$$

وبافتراض أن السلع يمكن شراؤها بأي كمية مهما كانت هذه الكمية صغيرة فإن مشكلة المستهلك تصبـح محاولـة تحقيق أقصى منفعة ممكنة في حدود دخله ؛ أي أن مشكلة المستهلك تصبح تعظيم الدالة

$$U = \phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

طبقًا للقيد (S.T.)

$$\psi = M - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 0$$

ويمكن حل هذه المشكلة باستخدام دالة لاجرانج (Lagrangian) ، فيصبح لدينا :

$$L = \phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \lambda \left(M - \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \right)$$

حيث L تمثل دالة لاجرانج ؛ أي أن دالة لاجرانج يمكن كتابتها كالآتي:

$$L = \phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \lambda(M - p_1x_1 - p_2x_2 - \ldots - p_nx_n)$$

وتتطلب الشروط الضرورية لتحقيق النهاية العظمى ما يلي:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} - \lambda p_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{\partial \phi}{\partial x_2} - \lambda p_2 = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_n} = \frac{\partial \phi}{\partial x_n} - \lambda p_n = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = M - \sum p_i x_i = 0$$

حيث λ تمثل مضاعف لاجرانج.

ويتضح أن الشروط الضرورية تعطي عددًا $(n + 1)$ من المعادلات في $(n + 1)$ من المجاهيل $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda)$ ومن ثم يمكن حلها بإحدى الطرق المعروفة لحل المعادلات الآتية للحصول على قيم:

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda$$

عند التوازن.

أما الشرط الكافي فإنه يتطلب أن تحمل محددات هيشيان Hessian المطوقة الإشارات الآتية:

$$\bar{S}_2 > 0$$

$$\bar{S}_3 < 0$$

$$\bar{S}_4 > 0$$

وهكـذا.

حيـث :

$$\bar{S}_2 = \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & \psi_1 \\ L_{21} & L_{22} & \psi_2 \\ \psi_1 & \psi_2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\bar{S}_3 = \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & \psi_1 \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & \psi_2 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & \psi_3 \\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\bar{S}_4 = \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} & \psi_1 \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & L_{24} & \psi_2 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & L_{34} & \psi_3 \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} & \psi_4 \\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 & \psi_4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\bar{S}_n = \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & \dots & L_{1n} & \psi_2 \\ L_{21} & L_{22} & \dots & L_{2n} & \psi_2 \\ \vdots & & & & \\ L_{n1} & L_{n2} & \dots & L_{nn} & \psi_n \\ \psi_1 & \psi_2 & \dots & \psi_n & 0 \end{vmatrix}$$

حيث :

$$L_{ii} = \frac{\partial^2 L}{\partial x_i^2} \; ; \; L_{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \, \partial x_j}$$

فمثلاً :

$$L_{22} = \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2}$$

$$L_{31} = \frac{\partial^2 L}{\partial x_3 \partial x_1}$$

وحيث :

$$\psi_i = \frac{\partial \psi}{\partial x_i}$$

مثلاً :

$$\psi_3 = \frac{\partial \psi}{\partial x_3}$$

حيث ψ تمثِّل شرط القيد. في حالتنا هذه تكون :

$$\psi = \mathbf{M} - p_1 x_1 - p_2 x_2 - \ldots - p_n x_n$$

ويمكن إثبات أن المستهلك يحقق التوازن (أي يحقق أقصى منفعة ممكنة) عندما :

$$\frac{MU_1}{p_1} = \frac{MU_2}{p_2} = \ldots = \frac{MU_3}{p_3} = MU_{money}$$

أي يتحقق التـوازن طبقًا للمدخل التقليدي عندما تتساوى نسبة المنفعة الحدِّية إلى السعـر بالنسبة لكل سلعة مع المنفعة الحدِّية للنقود، أو بصورة أخرى عندما يكون حاصل قسمة المنفعة الحدِّية على السعر متساويًا لكل السلع [Mills, 1984].

ويمكن إثبات ذلك بسهولة بالرجوع إلى الشروط الضرورية للتوازن حيث إن :

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} - \lambda\, p_i = 0$$

$$(i = 1, \ldots, n)$$

فلو كان هناك سلعتان فقط لحصلنا على :

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} - \lambda\, p_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{\partial \phi}{\partial x_2} - \lambda\, p_2 = 0$$

وواضح أن :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_1} = \lambda\, p_1$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_2} = \lambda\, p_2$$

لكن :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_1} = M\, U_1$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_2} = M\, U_2$$

أي أنه عند التوازن:

$$MU_1 = \lambda p_1$$
$$MU_2 = \lambda p_2$$

ومن المعادلتين السابقتين نحصل على:

$$\frac{MU_1}{p_1} = \lambda$$
$$\frac{MU_2}{p_2} = \lambda$$

أي أنه عند التوازن:

$$\frac{MU_1}{p_1} = \frac{MU_2}{p_2} = \lambda$$

حيث λ تمثِّل المنفعة الحدِّية للنقود، ويمكن إثبات ذلك كالآتي:

نفترض أن دالة المنفعة هي:

$$U = \phi (x_1, x_2)$$

ونفترض أن قيد الدخل هو:

$$M = p_1 x_1 + p_2 x_2$$

فإننا نحصل من دالة المنفعة (باستخدام التفاضل الكلي) على:

$$dU = \phi_1 dx_1 + \phi_2 dx_2$$

حيث:

$$\phi_1 = \frac{\partial \phi}{\partial x_1}$$
$$\phi_2 = \frac{\partial \phi}{\partial x_2}$$

وبتعويض شرط التوازن :

$$\phi_1 = \lambda\, p_1$$

$$\phi_2 = \lambda\, p_1$$

في معادلة dU نحصل على :

$$dU = \lambda\, p_1\, dx_1 + \lambda\, p_2\, dx_2$$

لكن من معادلة قيد الدخل نحصل على :

$$dM = p_1\, dx_1 + p_2\, dx_2$$

ولما كانت المنفعة الحدِّية للنقود تساوي :

$$MU_{money} = \frac{dU}{dM}$$

فإننا نحصل على :

$$MU_{money} = \frac{\lambda\, p_1\, dx_1 + \lambda\, p_2\, dx_2}{p_1\, dx_1 + p_2\, dx_2} = \lambda$$

أي أن مضاعف لاجرانج يمثل المنفعة الحدِّية للنقود.

ويمكن توضيح شروط توازن المستهلك طبقًا للمدخل التقليدي بمثال حسابي كالآتي.

مثال

نفترض أن دالة المنفعة كما يأتي :

$$U = -\,2x_1x_2 - 2.5x_1^2 + 0.5x_2^2 - 4x_3^2 + 29.5x_3 + 25x_1$$

ولنفترض أن سعر الوحدة من السلعة $x_1 = 1$ ومن السلعة $x_2 = 2$ ومن السلعة $x_3 = 3$ وأن دخل المستهلك = 25 وحدة نقدية. والمطلوب تحديد كمِّيات السلع التي يتعين على المستهلك شراءها حتى يحقق التوازن.

يحقق المستهلك توازنه طبقًا للمدخل التقليدي عندما تصل دالة منفعته إلى نهايتها العظمى بشرط أن يكون إنفاقه في حدود دخله؛ أي أن المشكلة محل البحث هي تعظيم الدالة:

$$U = -2x_1x_2 - 2.5x_1^2 + 0.5x_2^2 - 4x_3^2 + 29.5x_3 + 25x_1$$

طبقًا للقيد (.S.T):

$$\psi = 25 - x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0$$

ونحصل من دالة لاجرانج على:

$$L = -2x_1x_2 - 2.5x_1^2 + 0.5x_2^2 - 4x_3^2 + 29.5x_3 + 25x_1 + \lambda(25 - x_1 - 2x_2 - 3x_3)$$

الشروط الضرورية للتعظيم:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = L_1 = -2x_2 - 5x_1 + 25 - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = L_2 = -2x_1 + x_2 - 2\lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = L_3 = -8x_3 + 29.5 - 3\lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \psi = 25 - x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0$$

يمكن حل المعادلات الأربعة السابقة آنيًّا باستخدام قاعدة كرايمر (Cramer) مثلاً فنحصل على:

$$x_1 = \frac{|D_1|}{|D|} \quad ; \quad x_2 = \frac{|D_2|}{|D|} \quad ;$$

$$x_3 = \frac{|D_3|}{|D|} \quad ; \quad \lambda = \frac{|D_4|}{|D|}$$

حيث :

$$|D| = \begin{vmatrix} -5 & -2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -8 & -3 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -7$$

وحيث :

$$|D_1| = \begin{vmatrix} -25 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ -29.5 & 0 & -8 & -3 \\ -25 & -2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -17.5$$

$$|D_2| = \begin{vmatrix} -5 & -25 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -29.5 & -8 & -3 \\ -1 & -25 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -42$$

$$|D_3| = \begin{vmatrix} -5 & -2 & -25 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -29.5 & -3 \\ -1 & -2 & -25 & 0 \end{vmatrix} = -24.5$$

$$|D_4| = \begin{vmatrix} -5 & -2 & 0 & -25 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -29.5 \\ -1 & -2 & -3 & -25 \end{vmatrix} = -3.5$$

وبتعويض قيم المحددات أعلاه نحصل على:

$$x_1 = 2.5; x_2 = 6; x_3 = 3.5; \lambda = 0.5$$

وهي القيم التي تحقق الشروط الضرورية للتوازن.

لمعـرفة ما إذا كان الشرط الكافي سوف يتحقق عند هذه القيم نقوم بحساب عناصر محددة هيشيان المطوقة والتي هي:

$$L_{11} = \frac{\partial L_1}{\partial x_1} = -5$$

$$L_{12} = \frac{\partial L_1}{\partial x_2} = -2$$

$$L_{13} = \frac{\partial L_1}{\partial x_3} = 0$$

$$L_{21} = L_{12} = -2$$

$$L_{22} = \frac{\partial L_2}{\partial x_2} = 1$$

$$L_{23} = \frac{\partial L_2}{\partial x_3} = 0$$

$$L_{31} = L_{13} = 0$$

$$L_{32} = L_{23} = 0$$

$$L_{33} = \frac{\partial L}{\partial x_3} = -8$$

$$\psi_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = -1$$

$$\psi_2 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = -2$$

$$\psi_3 = \frac{\partial \psi}{\partial x_3} = -3$$

وبتعويض هذه القيم في محددات هيشيان من الدرجة الثانية والثالثة نحصل على :

$$\bar{S}_2 = \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & \psi_1 \\ L_{21} & L_{22} & \psi_2 \\ \psi_1 & \psi_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 11$$

$$\bar{S}_3 = \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & \psi_1 \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & \psi_2 \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & \psi_3 \\ \psi_1 & \psi_2 & \psi_3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -8 & -3 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = -7$$

ولما كانت $\bar{S}_2 > 0, \bar{S}_3 < 0$ ، فإن الشرط الكافي يتحقق عند قيم x_1, x_2, x_3, λ التي تحقق الشروط الضرورية.

وهكـذا فإن المستهلك يحقق أقصى منفعة ممكنة عندما يستهلك $2\frac{1}{2}$ وحدة من السلعـة x_1 ، 6 وحـدات من السلعـة x_2 ، $3\frac{1}{2}$ وحدة من السلعة x_3 ، وتكون منفعته الكلية عند نهايتها القصوى مساوية 89.125 ، وهي القيمة التي نحصل عليها عند تعويض قيم التوازن في معادلة المنفعة؛ أي أن:

$$U_{max} = -2\,(2.5)\,(6) - 2.5\,(2.5)^2 + 0.5\,(6)^2 - 4\,(3.5)^2 + 29.5\,(3.5) + 25\,(2.5)$$
$$= 89.125$$

وتكون المنفعة الحدِّية للنقود مساوية:

$$MU_{money} = \lambda = 0.5$$

ويمكن إثبات أن التوازن يتحقق عندما:

$$\frac{\text{المنفعة الحدِّية للسلعة } x_1}{\text{ثمن } x_1} = \frac{\text{المنفعة الحدِّية للسلعة } x_2}{\text{ثمن } x_2} = \frac{\text{المنفعة الحدِّية للسلعة } x_3}{\text{ثمن } x_3} = \text{المنفعة الحدِّية للنقود}$$

ويجب ملاحظة أنه إذا كانت دالة الهدف دالة في عدد (n) من المتغيّرات وتخضع لعـدد (m) من القيود، بحيث $m < n$ ، فإن الشرط الكافي لتحقيق النهاية العظمى يتـطلب أن تحمـل محددة هيشيان المـطوقـة (بـأكثـر من قيد) $\hat{S}_n$ الإشارة $(-1)^n$ ، وتحمـل المحـددة $\hat{S}_{n-1}$ إشـارة مخالفـة لإشـارة $\hat{S}_n$ ، بينما تحمل المحددة $\hat{S}_{n-2}$ إشارة مخالفة لإشارة المحددة $\hat{S}_{n-1}$ ، وهكذا.

(٢ ـ ٢) مدخل منحنيات السواء

طبقًا لهذا المدخل لايستطيع المستهلك أن يقيس المنفعة التي يحصل عليها من استهلاك أو امتلاك السلع بصورة رقمية ولكن في استطاعته أن يقرر أية مجموعة من السلع يفضل، فالمنفعة، طبقًا لهذا المدخل، يمكن قياسها ترتيبًا (ordinal) وليس رقميًا (cardinal). فيمكن رسم خريطة لكل مستهلك تعرف بخريطة السواء حيث يمثل كل منحنى في هذه الخريطة مقدارًا ثابتًا من الإشباع أو المنفعة، وهكذا يعرف بمنحنى سواء حيث إن كل نقطة على هذا المنحنى تمثل درجة الإشباع نفسها؛ ومن ثم فإن المستهلك يكون على السواء بالنسبة لدرجة الإشباع عند النقاط المختلفة على المنحنى نفسه، كما أن اختيار نقطة بالذات إنما يدل على تفضيل المستهلك لخليط السلع التي تمثلها هذه النقطة.

وهكذا فإنه يمكننا أن نفترض أن لكل فرد تفضيلاً محددًا للسلع التي ينفق عليها دخله فلو كانت هناك سلعتان x_1 ، x_2 لأمكن التعبير عن المنفعة على منحنى سواء معين كالآتي:

$$U = \bar{U} = \text{ثابت}$$

أو:

$$U = U(x_1, x_2) = \text{Constant}$$

أي أن المنفعة على أي منحنى سواء تكون ثابتة، ويحصل المستهلك على منفعة أكبر إذا انتقل فقط إلى منحنى سواء أعلى.

وبناءً على ذلك فإنه يمكن التعبير عن ثبات درجة الإشباع أو المنفعة على منحنى السواء الواحد كالآتي:

$$dU = 0$$

أو:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2} dx_2 = 0$$

ويمكن استخدام هذه المعادلة في استنتاج معدَّل الإحلال الحدِّي بين السلعتين والـذي يقيس الكمية المطلوبة من السلعة x_2 ، لتعويض النقص الحدِّي في السلعة x_1 ، حتى يبقى المستهلك عند مستوى الإشباع نفسه [Brems, 1968].

وبناءً على ذلك فإن معدَّل الإحلال الحدِّي يقيس ميل منحنى السواء ويعبِّر عنه رياضيًّا كالآتي :

$$r = MRS = \frac{dx_2}{dx_1}$$

وبالتعويض في معادلة dU نحصل على :

$$r = -\frac{\partial U}{\partial x_1} / \frac{\partial U}{\partial x_2}$$

أي أن معدَّل الإحلال بين السلعتين x_2 ، x_1 يساوي سالب نسبة المنفعة الحدِّية للسلعة x_1 إلى المنفعة الحدِّية للسلعة x_2. ولما كانت المنفعة الحدِّية لأي سلعة موجبة فإن معدَّل الإحلال الحدِّي يكون سالبًا أو بعبارة أخرى يكون ميل منحنى السواء سالبًا. أي أن منحنيات السواء تنحدر إلى أسفل نحو اليمين.

(٢ ـ ٢ ـ ١) تناقص المنفعة ومعدَّل الإحلال الحدِّي

سوف نثبت هنا علاقة مهمة وهي أن تناقص المنفعة لا يعني أن منحنيات السواء تكون محدَّبة من أسفل، كما أن تحدّب منحنيات السواء هذا لا يعني تناقص المنفعة الحدِّية.

لنفترض أن دالة المنفعة كما يأتي :

$$U = \phi\,(x_1, x_2)$$

فإنه يمكن اشتقاق:

$$\phi_1 = \frac{\partial U}{\partial x_1} \quad ; \quad \phi_2 = \frac{\partial U}{\partial x_2}$$

$$\phi_{11} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} \quad ; \quad \phi_{22} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2}$$

$$\phi_{12} = \phi_{21} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \, \partial x_2}$$

ولنفترض أن المنفعة الحدِّية موجبة أو:

$$\phi_1 > 0 \quad ; \quad \phi_2 > 0$$

فإن تناقص المنفعة معناه:

$$\phi_{11} < 0 \quad ; \quad \phi_{22} < 0$$

وأن تحدّب منحنى السواء (من أسفل) معناه:

$$\frac{dr}{dx_1} > 0$$

هذا وقد سبق أن أثبتنا أن:

$$r = \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{MU_1}{MU_2} = -\frac{\phi_1}{\phi_2}$$

وبناءً على ذلك فإن تحدب منحنى السواء معناه:

$$\frac{dr}{dx_1} = \frac{d}{dx_1}\left(-\frac{\phi_1}{\phi_2} \right) > 0$$

أي أن:

$$\left\{-\phi_2\left[\phi_{11}\frac{dx_1}{dx_1}+\phi_{12}\frac{dx_2}{dx_1}\right]\right.$$
$$\left.+\phi_1\left[\phi_{21}\frac{dx_1}{dx_1}+\phi_{22}\frac{dx_2}{dx_1}\right]\right\}/\phi_2^2$$

تكون كمية موجبة.

وبتعويض:

$$-\frac{\phi_1}{\phi_2}=\frac{dx_2}{dx_1}$$

نحصل على:

$$\frac{-\phi_2\phi_{11}+\phi_1\phi_{12}-\dfrac{\phi_1^2\phi_{22}}{\phi_2}+\phi_1\phi_{21}}{\phi_2^2}>0$$

أي أن:

$$\frac{2\phi_1\phi_2\phi_{12}-\phi_1^2\phi_{22}-\phi_2^2\phi_{11}}{\phi_2^3}>0$$

ويتضح من هذه المعادلة الأخيرة أن تناقص المنفعة ($\phi_{11}<0;\phi_{22}<0$) لا يحقق بالضرورة تحدّب منحنى السواء؛ حيث إن ϕ_{12} قد تكون سالبة.

كما يتضح من المعادلة الأخيرة أن تحدّب منحنى السواء ليس بالضرورة معناه تناقص المنفعة الحدِّية، لأن $\frac{dr}{dx_1}$ قد تكون موجبة رغم أن ϕ_{11} أو ϕ_{22} أو كلا منهما يكون

موجبًا أيضًا، وذلك إذا ما كانت ϕ_{12} موجبة وكانت $2\phi_1 \phi_2 \phi_{12} > (-\phi_1^2 \phi_{22} - \phi_2^2 \phi_{11})$.

(٢ - ٢ - ٢) مرونة منحنى السواء

تعرف مرونة منحنى السواء بأنها معدّل التغيّر النسبي في السلعتين.

$$\eta_i = \frac{dx_2}{x_2} \div \frac{dx_1}{x_1}$$

$$= \frac{dx_2}{dx_1} \cdot \frac{x_1}{x_2}$$

لكن:

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\partial U}{\partial x_1} / \frac{\partial U}{\partial x_2}$$

وبناء على ذلك تكون مرونة منحنى السواء مساوية:

$$\eta_i = \left[-\frac{\partial U}{\partial x_1} / \frac{\partial U}{\partial x_2} \right] \cdot \frac{x_1}{x_2}$$

أي أن:

$$\text{مرونة منحنى السواء} = \frac{\text{المنفعة الحدِّية للسلعة ١}}{\text{المنفعة الحدِّية للسلعة ٢}} \cdot \frac{\text{كمية السلعة ١}}{\text{كمية السلعة ٢}}$$

فلو افترضنا أن دالة المنفعة:

$$U = 2x_1^{1/4} x_2^{3/4}$$

لحصلنا على مرونة منحنى السواء كالآتي:

$$\eta_i = -\frac{x_2}{3x_1} \cdot \frac{x_1}{x_2} = -1/3$$

(٢ ـ ٢ ـ ٣) توازن المستهلك طبقًا لمدخل منحنيات السواء ومدلولاته

طبقًا لهذا المدخل يحاول المستهلك ذو الدخل المحدود أن يصل إلى أعلى منحنى سواء على خريطة السواء وذلك في حدود إمكانياته المالية. ويتحقق التوازن عند النقطة التي يصبح فيها خط الدخل مماسًا لمنحنى السواء.

وبناء على ذلك يتحقق التوازن عند النقطة التي يصبح فيها ميل خط الدخل مساويًا لسالب ميل منحنى السواء؛ إلا أن ميل خط الدخل تمثله النسبة بين سعري السلعتين أو (p_1 / p_2).

كما أن ميل منحنى السواء (كما سبق أن رأينا) يمثله معدّل الإحلال الحدِّي (r)، وهكذا يتحقق التوازن عندما:

$$r = -\frac{p_1}{p_2}$$

كما أن ميل منحنى السواء يمكن التعبير عنه كالآتي:

$$r = -\frac{MU_1}{MU_2}$$

أي يساوي نسبة المنفعة الحدِّية للسلعتين، وهكذا يتحقق التوازن عندما:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{MU_1}{MU_2}$$

أي أن التوازن طبقًا لمدخل منحنيات السواء يتحقق عندما تكون:

$$\frac{\text{المنفعة الحدِّية للسلعة أ}}{\text{المنفعة الحدِّية للسلعة ب}} = \frac{\text{سعر السلعة أ}}{\text{سعر السلعة ب}}$$

وهو الشرط نفسه الذي توصلنا إليه باتباع المدخل التقليدي لتوازن المستهلك [Henderson, 1971].

إلا أن هناك فروقًا شاسعة بين مدلولات التوازن طبقًا لكل من المدخلين، وسوف نعالج بشيء من التفصيل مدلولات التوازن بالنسبة لمدخل منحنيات السواء.

المدلول الأول

يتزايد معدّل الإحلال الحدِّي بين السلعتين بالقرب من نقطة التوازن كلما حلت سلعة محل الأخرى.

ولإثبات هذه الخاصة من خصائص توازن المستهلك طبقًا لمدخل منحنيات السواء نفترض أن دالة المنفعة هي :

$$U = \phi(x_1, x_2)$$

وأن قيد الدخل هو:

$$M = p_1 x_1 + p_2 x_2$$

حيث p_1 ، p_2 يمثلان سعري السلعتين x_1 ، x_2 على الترتيب.

وباستخدام دالة لاجرانج نحصل على :

$$L = \phi(x_1, x_2) + \lambda(M - p_1x_1 - p_2x_2)$$

وتعطي الشروط الضرورية للتوازن :

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \phi_1 - \lambda p_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \phi_2 - \lambda p_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = M - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0$$

ومن هذه الشروط نحصل على :

$$\frac{\phi_1}{p_1} = \frac{\phi_2}{p_2} = \lambda$$

$$\frac{\phi_1}{\phi_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

حيث تمثل ϕ_i المنفعة الحدِّية للسلعة i ؛ أي أن :

$$\phi_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}$$

وحيث تمثل λ المنفعة الحدِّية للنقود :

$$\lambda = \frac{dU}{dM}$$

ويتضح أن الشروط السابقة هي الشروط نفسها التي حصلنا عليها من المدخل التقليدي .

أمـا الشرط الكافي لتحقيق توازن المستهلك فيتطلب أن تكون محددة هيشيان المطوقة موجبة أو:

$$\bar{S}_2 = \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & \psi_1 \\ L_{21} & L_{22} & \psi_2 \\ \psi_1 & \psi_2 & 0 \end{vmatrix} > 0$$

وحيث إن :

$$L_{11} = \phi_{11}; L_{12} = \phi_{12}; L_{21} = \phi_{21}; L_{22} = \phi_{22}; \psi_1 = -p_1; \psi_2 = -p_2$$

فإن محددة هيشيان تصبح مساوية :

$$\bar{S}_2 = \begin{vmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & -p_1 \\ \phi_{21} & \phi_{22} & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{vmatrix} > 0$$

وبحلِّ هذه المحددة نحصل على :

$$(p_1^2 \phi_{22} - 2\, p_1\, p_2\, \phi_{12} + p_2^2\, \phi_{11}) < 0$$

ولكن سبق أن رأينا أن التغيّر في معدّل الإحلال الحدِّي (r) بالنسبة للسلعة x_1 يساوي

$$\frac{dr}{dx_1} = \frac{d}{dx_1}\left(-\frac{\phi_1}{\phi_2} \right)$$

$$= \frac{-\phi_{11}\,\phi_2^2 + 2\,\phi_1\,\phi_2\,\phi_{12} - \phi_{22}\,\phi_1^2}{\phi_2^3}$$

وبتعويض قيمة ϕ_1 ، ϕ_2 عند التوازن أي بتعويض :

$$\phi_1 = \lambda\, p_1$$

$$\phi_2 = \lambda\, p_2$$

نحصل على :

$$\frac{dr}{dx_1} = -\lambda^2 \frac{p_1^2\,\phi_{22} - 2\,p_1\,p_2\,\phi_{12} + p_2^2\,\phi_{11}}{\phi_2^3}$$

ولما كانت :

$$\lambda^2 > 0$$

$$\phi_2 > 0$$

فإن $\frac{dr}{dx_1}$ يكون موجبًا إذا كانت

$$(p_1^2 \phi_{22} - 2 p_1 p_2 \phi_{12} + p_2^2 \phi_{11}) < 0$$

وقد أثبتنا أن محددة هيشيان تحقق ذلك عندما يتحقق الشرط الكافي للتوازن، وبناءً على ذلك لابد وأن يكون :

$$\frac{dr}{dx_1} > 0$$

أي أن معدَّل الإحلال الحدِّي يتزايد كلما عوضنا سلعة محل الأخرى، أو بعبارة أخرى يكون منحنى السواء محدبًا (من أسفل) بالقرب من نقطة التوازن.

المدلول الثاني

لا يؤثر تغيّر مقياس المنفعة في شروط التوازن طالما أن المقياس الجديد تحويلة تزايدية مستمرة للمقياس الأصلي

يكون مقياس المنفعة F تحويلة متزايدة مستمرة لمقياس المنفعة ϕ أي أن :

$$F = G(\phi)$$

إذا كانت $G' > 0$.

ولإثبات هذا المدلول نفترض دالة المنفعة الآتية :

$$U = G[\phi(x_1, x_2)]$$

حيث G تمثل تحويلة متزايدة مستمرة للدالة ϕ وحيث معامل التفاضل الأول G' ومعامل التفاضل الثاني G'' يمكن اشتقاقهما.

والمطلوب تعظيم دالة المنفعة U بالنسبة للسلعتين x_1, x_2.

وبأخذ شرط القيد :

$$M = p_1 x_1 + p_2 x_2$$

في الاعتبار (حيث p_1 يمثل سعر x_1 ، p_2 يمثل سعر x_2) .

وباستخدام دالة لاجرانج نحصل على:

$$L = G[\phi(x_1, x_2)] + \lambda^* (M - p_1 x_1 - p_2 x_2)$$

وتعطي الشروط الضرورية للتعظيم:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{dG}{d\phi}\frac{\partial \phi}{\partial x_1} - \lambda^* p_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{dG}{d\phi}\frac{\partial \phi}{\partial x_2} - \lambda^* p_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda^*} = M - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0$$

وطبقًا لهذه الشروط:

$$\left[\frac{dG}{d\phi} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right] / p_i = \lambda^*$$

$$M = \sum_{i=1}^{2} p_i x_i$$

وبمعنى آخر:

$$\frac{G' \phi_i}{p_i} = \lambda^*$$

$$M = \sum_{i=1}^{2} p_i x_i$$

وشروط التوازن هذه هي الشروط نفسها التي حصلنا عليها سابقًا إذا ما كانت:

$$\lambda^* = \lambda \frac{dG}{d\phi} = \lambda G'$$

ويمكن إثبات صحة هذه المعادلة فيما يلي :

من شرط التوازن أعلاه حصلنا على

$$G' \phi_i = \lambda^* p_i$$

ومن شرط التوازن في الحالة العادية حصلنا على :

$$\phi_i = \lambda p_i$$

وبناءً على ذلك فإن :

$$G' \lambda p_i = \lambda^* p_i$$

$$\lambda^* = \lambda G'$$

وهو المطلوب إثباته .

وتوضِّح المعادلة الأخيرة أن المنفعة الحدِّية للنقود تتغيَّر مع التغيّر في مقياس المنفعة ولكن إذا كانت المنفعة تقاس ترتيبًا فقط فإن تغيّر مقياس المنفعة (ومن ثم المنفعة الحدِّية للنقود) لن يؤثِّر في الشروط الضرورية لتوازن المستهلك .

ويمكن إثبات أن الشرط الكافي لن يتأثر أيضًا نتيجة تغيّر مقياس المنفعة وبشرط أن يكون المقياس الجديد تحويلة تزايدية مستمرة للمقياس الأصلي [Chiang, 1974; Intriligator, 1971 and Lancaster, 1968].

ولنبدأ أولاً في حساب عناصر محددة هيشيان المطوقة كالآتي :

$$L_{11} = G'' \phi_1^2 + G' \phi_{11}$$

$$L_{12} = G'' \phi_1 \phi_2 + G' \phi_{12}$$

$$L_{21} = G'' \phi_1 \phi_2 + G' \phi_{21}$$

$$L_{22} = G'' \phi_2^2 + G' \phi_{22}$$

$$\psi = M - p_1 x_1 - p_2 x_2$$

$$\psi_1 - p_1 \quad ; \quad \psi_2 = - p_2$$

وتصبح محددة هيشيان مساوية :

$$\bar{S}_2' = \begin{vmatrix} G''\phi_1^2 + G'\phi_{11} & G''\phi_1\phi_2 + G'\phi_{12} & -p_1 \\ G''\phi_1\phi_2 + G'\phi_{21} & G''\phi_2^2 + G'\phi_{22} & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{vmatrix}$$

ويكون المطلوب إثبات أن تغيّر مقياس المنفعة لن يؤثِّر في إشارة هذه المحددة.

وبتعويض قيمة λ^* عند التوازن :

$$\lambda^* = \frac{G'\phi_i}{p_i}\,; (i = 1,2)$$

أو:

$$p_i = G'\phi_i / \lambda^*, (i = 1, 2)$$

نحصل على :

$$\bar{S}_2' = \begin{vmatrix} G''\phi_1^2 + G'\phi_{11} & G''\phi_1\phi_2 + G'\phi_{12} & -G'\phi_1/\lambda^* \\ G''\phi_1\phi_2 + G'\phi_{21} & G''\phi_2^2 + G'\phi_{22} & -G'\phi_2/\lambda^* \\ -G'\phi_1/\lambda^* & -G'\phi_2/\lambda^* & 0 \end{vmatrix}$$

وبضرب الصف الأخير والعمود الأخير في λ^* / G' نحصل على :

$$\bar{S}_2' = \left(\frac{G'}{\lambda^*}\right)^2 \begin{vmatrix} G''\phi_1^2 + G'\phi_{11} & G''\phi_1\phi_2 + G'\phi_{12} & -\phi_1 \\ G''\phi_1\phi_2 + G'\phi_{21} & G''\phi_2^2 + G'\phi_{22} & -\phi_2 \\ -\phi_1 & -\phi_2 & 0 \end{vmatrix}$$

وبضرب الصف الأخير في $G''\phi_1$ ، وإضافته للصف الأول وبضرب الصف الأخير في $G''\phi_2$ ، وإضافته للصف الثاني نحصل على :

$$\bar{S}_2' = \left(\frac{G'}{\lambda^*}\right)^2 \begin{vmatrix} G'\phi_{11} & G'\phi_{12} & -\phi_1 \\ G'\phi_{21} & G'\phi_{22} & -\phi_2 \\ -\phi_1 & -\phi_2 & 0 \end{vmatrix}$$

وبتعويض :

$$\phi_1 = \lambda^* p_1 / G'$$
$$\phi_2 = \lambda^* p_2 / G'$$

وبضرب الصف الأخير، والعمود الأخير في G'/λ^* نحصل على :

$$\bar{S}_2' = \begin{vmatrix} G'\phi_{11} & G'\phi_{12} & -p_1 \\ G'\phi_{21} & G'\phi_{22} & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{vmatrix}$$

وبضرب العمود الأخير في G' ، وبقسمة الصفين الأول والثاني على G' نحصل على :

$$\bar{S}_2' = G' \begin{vmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & -p_1 \\ \phi_{21} & \phi_{22} & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{vmatrix}$$

ويتضح أن هذه المحددة الأخيرة لا تختلف عن محددة هيشيان المطوقة في الحالة العادية ، إلا في أنها مضروبة في G'. فإذا كانت $G' > 0$ فإن إشارة المحددة لن تتأثر، ولن يتأثر الشرط الكافي للتوازن . وبالطبع تكون $G' > 0$ إذا كان مقياس المنفعة تحويلة متزايدة باستمرار من المقياس الأصلي .

المدلول الثالث

لن يتأثر توازن المستهلك إذا حدث تغيّر نسبي متساوٍ في الدخل والأسعار كافة .

ومعنى ذلك أنه إذا تضاعف الدخل، وتضاعفت الأسعار كافة في الوقت نفسه، لن يغيِّر المستهلك من الكميات المطلوبة أو المشتراة من السلع المختلفة .

ولإثبات هذا المدلول نفترض دالة المنفعة الآتية :

$$U = \phi(x_1, x_2)$$

ونفترض أن الدخل والأسعار تغيّرت بنسبة معيَّنة α فإن قيد الدخل يصبح :

$$M^* = \alpha M = \alpha p_1 x_1 + \alpha p_2 x_2$$

وتعطي دالة لاجرانج :

$$L = \phi(x_1, x_2) + \lambda [M^* - \alpha p_1 x_1 - \alpha p_2 x_2]$$

وتكون الشروط الضرورية للتوازن :

$$\phi_1 - \alpha \lambda^{**} p_1 = 0$$

$$\phi_2 - \alpha \lambda^{**} p_2 = 0$$

$$M^* - \alpha p_1 x_1 - \alpha p_2 x_2 = 0$$

وتعطي هذه الشروط :

$$\frac{\phi_1}{\alpha p_1} = \lambda^{**}$$

$$\frac{\phi_2}{\alpha p_2} = \lambda^{**}$$

$$\alpha \sum_{i=1}^{2} p_i x_i = \alpha M$$

أو:

$$\frac{\phi_1}{p_1} = \frac{\phi_2}{p_2} = \alpha \lambda^{**}$$

$$\sum_{i=1}^{2} p_i x_i = M$$

ويتضح أن شروط التوازن هذه هي نفسها التي توصلنا إليها سابقًا طالما أن :

$$\lambda^{**} = \frac{\lambda}{\alpha}$$

أي طالما أن المنفعة الحدِّية للنقود عند التوازن تكون قد نقصت بنسبة الزيادة في الأسعارة والدخول نفسها [Wismer, 1978].

وبناءً على ذلك فإن توازن المستهلك لن يتأثر إذا تغيّرت الأسعار والدخل بالنسبة نفسها. ولكن الذي سوف يحدث هو تغيّر عكسي في المنفعة الحدِّية للنقود بالنسبة نفسها. ونترك للطالب إثبات أن الشرط الكافي للتوازن لن يتغيَّر أيضًا.

(٢ ـ ٣) الأثر الدخلي والأثر الإحلالي لتغيّر السعر

مع أن توازن المستهلك لا يختلف كثيرًا طبقًا لمدخل منحنيات السواء عنه في المدخل التقليدي، إلا أن مدلولات التوازن طبقًا للمدخل الأول تختلف كُلّيةً، وخاصة نجاح هذا المدخل في توضيح أن هناك أثرين منفصلين لتغيّر سعر السلعة على الطلب عليها هما: الأثر الدخلي والأثر الإحلالي أو التعويضي وقد كان لهذا التقسيم أثر مهم على النظرية الاقتصادية في ناحيتين:

ا ـ أصبح في الإمكان اشتقاق نظرية أكثر عمومية للطلب.

ب ـ أصبح في الإمكان استخدام أسلوب التحليل نفسه في شرح الكثير من الظواهر الاقتصادية.

وسوف نقوم في هذا الجزء من الفصل بتوضيح كيف نفصل بين الأثر الإحلالي والأثر الدخلي لتغيّرات السعر وكيف نستخدم هذا الفصل في اشتقاق دالة عامة للطلب تمثل السلع العادية والسلع الرديئة (ومنها سلع جفن Giffen) .

نفترض دالة المنفعة الآتية :

$$U = \phi(x_1, x_2)$$

ونفترض قيد الدخل :

$$M = p_1 x_1 + p_2 x_2$$

لتعظيم دالة المنفعة نستخدم دالة لاجرانج :

$$L = \phi(x_1, x_2) + \lambda(M - p_1 x_1 - p_2 x_2)$$

وتعطي الشروط الضرورية للتوازن :

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \phi_1 - \lambda p_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \phi_2 - \lambda p_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = M - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0$$

وبأخذ التفاضل الكلي لكل معادلة نحصل على :

$$\phi_{11} dx_1 + \phi_{12} dx_2 - p_1 d\lambda = \lambda dp_1$$

$$\phi_{21} dx_1 + \phi_{22} dx_2 - p_2 d\lambda = \lambda dp_2$$

$$p_1 dx_1 + p_2 dx_2 = dM - x_1 dp_1 - x_2 dp_2$$

بحلٍّ هذه المعادلات آنيًّا نحصل على :*

$$dx_1 = \frac{\begin{vmatrix} \lambda dp_1 & \phi_{12} & -p_1 \\ \lambda dp_2 & \phi_{22} & -p_2 \\ -dM + x_1dp_1 + x_2dp_2 & -p_2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & -p_1 \\ \phi_{21} & \phi_{22} & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{vmatrix}}$$

ولكن سبق أن رأينا أن الشرط الكافي للتوازن يعطي :

$$\bar{S}_2 = \begin{vmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & -p_1 \\ \phi_{21} & \phi_{22} & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{vmatrix} > 0$$

وهكذا يمكن كتابة معادلة dx_1 أعلاه كالآتي :

$$dx_1 = \frac{\begin{vmatrix} \lambda dp_1 & \phi_{12} & -p_1 \\ \lambda dp_2 & \phi_{22} & -p_2 \\ -dM + x_1dp_1 + x_2dp_2 & -p_2 & 0 \end{vmatrix}}{\bar{S}_2} \qquad (1)$$

لإيجاد أثر تغيّر السعر p_1 على الطلب على السلعة x_1 نفترض ثبات الدخل والسعر p_2 فنحصل على :

$$(dx_1)_{dp_2=dM=0} = \frac{\begin{vmatrix} \lambda dp_1 & \phi_{12} & -p_1 \\ 0 & \phi_{22} & -p_2 \\ x_1 dp_1 & -p_2 & 0 \end{vmatrix}}{\bar{S}_2}$$

وتعطي هذه المعادلة :

$$\left(\frac{dx_1}{dp_1}\right)_{dp_2=dM=0} = -\frac{\lambda p_2^2}{\bar{S}_2} + \frac{x_1 \begin{vmatrix} \phi_{12} & -p_1 \\ \phi_{22} & -p_2 \end{vmatrix}}{\bar{S}_2} \qquad (2)$$

ويتضح أن لتغيّر السعر أثرين سوف نثبت أن أحدهما الأثر الدخلي والآخر الأثر الإحلالي أو التعويضي [Theil, 1976] .

لاستنتاج الأثر الدخلي نفترض أن :

$$dp_1 = dp_2 = 0$$
$$dM \neq 0$$

ونعوّض في معادلة dx_1 فنحصل على :

$$(dx_1)_{dp_1=dp_2=0} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \phi_{12} & -p_1 \\ 0 & \phi_{22} & -p_2 \\ -dM & -p_2 & 0 \end{vmatrix}}{\bar{S}_2}$$

أي أن:

$$\left(\frac{dx_1}{dp_1}\right)_{dp_1 = dp_2 = 0} = -\frac{\begin{vmatrix} \phi_{12} & -p_1 \\ \phi_{22} & -p_2 \end{vmatrix}}{\bar{S}_2}$$

وتمثِّل هذه المعادلة الأثر الدخلي لتغيّر السعر، فتعطي التغيّر في الطلب نتيجة تغيّر الدخل بافتراض ثبات الأسعار.

وبتعويض هذه المعادلة الأخيرة في المعادلة (2) نحصل على:

$$\left(\frac{dx_1}{dp_1}\right) = \frac{-\lambda p_2^2}{\bar{S}_2} - x_1 \frac{dx_1}{dM} \qquad (3)$$

وتعطي هذه المعادلة أثر تغيّر السعر ويطلق عليها اسم معادلة سلوتسكي وتوضح أن لتغيّر السعر أثرين هما:

(١) الأثر الإحلالي: $\frac{-\lambda p_2^2}{\bar{S}_2}$

(٢) الأثر الدخلي $\frac{dx_1}{dM}$ *مضروبًا في* $(-x_1)$

ويمكن إعادة صياغة هذه المعادلة باستخدام المحددات فقد سبق أن أثبتنا أن:

$$\left(\frac{dx_1}{dM}\right) = -\frac{\begin{vmatrix} \phi_{12} & -p_1 \\ \phi_{22} & -p_2 \end{vmatrix}}{\bar{S}_2}$$

لكن المحـددة في البسط هي عبارة عن المحدد المصغر الذي نحصل عليه لو حذفنا الصف الثالث والعمود الثاني من محددة $\bar{S}_2$ ؛ أي أن :

$$\begin{vmatrix} \phi_{12} & -p_1 \\ \phi_{22} & -p_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & -p_1 \\ \phi_{21} & \phi_{22} & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{vmatrix} = \bar{S}^*_{31}$$

وهكذا يمكن كتابة الأثر الدخلي لتغير السعر كالآتي :

$$\frac{dx_1}{dM} = - \bar{S}^*_{31}$$

وأيضًا يمكن إثبات أن :

$$- \lambda \, p_2^2 = \lambda \, \bar{S}^*_{11}$$

حيث $\bar{S}^*_{11}$ تمثّل المحدد المصغر الذي نحصل عليه عندما نحذف الصف الأول والعمود الأول في المحددة $\bar{S}_2$.

أي أن :

$$- \lambda \; p_2^2 = - \lambda \begin{vmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & -p_1 \\ \phi_{21} & \phi_{22} & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{vmatrix} = \lambda \, \bar{S}^*_{11}$$

وبناءً على ذلك يمكن كتابة معادلة سلوتسكي كالآتي :

$$\frac{dx_1}{dp_1} = \frac{-\lambda p_2^2}{\bar{S}_2} - x_1 \frac{dx_1}{dM}$$

$$\frac{dx_1}{dp_1} = \frac{1}{\bar{S}_2} \left[\lambda \, \bar{S}^*_{11} + x_1 \, \bar{S}^*_{31} \right]$$

ويمكن إثبات أن:

$$\lambda \frac{\bar{S}^{*}_{11}}{\bar{S}_2} = - \frac{\lambda\, p_2^2}{\bar{S}_2}$$

تمثّل الأثر الإحلالي لتغيّر السعر كما يلي:

لنفترض أن المستهلك يبقي على منحنى السواء نفسه؛ أي نفترض أنه لا يوجد أي تغيّر في المنفعة الكلية أو درجة الإشباع، وبعبارة أخرى نفترض أن:

$$dU = 0$$

فإننا في هذه الحالة نحصل على:

$$dU = \phi_1 dx_1 + \phi_2\, dx_2 = 0$$

وحيث إنه عند التوازن:

$$\phi_1 - \lambda\, p_1 = 0$$
$$\phi_2 - \lambda\, p_2 = 0$$

فإن:

$$p_1 dx_1 + p_2 dx_2 = 0$$

لكن من معادلة الدخل نحصل على:

$$M = p_1 x_1 + p_2 x_2$$
$$\therefore dM = p_1 dx_1 + x_1 dp_1 + p_2 dx_2 + x_2 dp_2$$
$$\therefore dM - x_1 dp_1 - x_2 dp_2 = p_1 dx_1 + p_2 dx_2$$

فإذا بقي المستهلك على منحنى السواء نفسه وكانت $dU = 0$ فإننا نحصل على:

$$dM - x_1 dp_1 - x_2 dp_2 = 0$$

وبتعويض هذه المعادلة الأخيرة في المعادلة (1) نحصل على:

$$\left(\frac{dx_1}{dp_1}\right)_{dU=0} = \frac{\begin{vmatrix} \lambda & \phi_{12} & -p_1 \\ 0 & \phi_{22} & -p_2 \\ 0 & -p_2 & 0 \end{vmatrix}}{\bar{S}_2}$$

أي أن :

$$\left(\frac{dx_1}{dp_1}\right)_{dU=0} = \frac{-\lambda\, p_2^2}{\bar{S}_2}$$

وهو الأثر الإحلالي .

ولما كانت $\lambda > 0$ (إذ أنه لابد أن تكون المنفعة الحدِّية للنقود موجبة) ، $p_2^2 > 0$ فإن إشارة الأثر الإحلالي تتوقف على إشارة $\bar{S}_2$ ، وقد سبق أن أثبتنا أن هذه الإشارة لابد وأن تكون موجبة ، إذا تحقق الشرط الكافي للتوازن . ومعنى ذلك أن :

$$\left(\frac{dx_1}{dp_1}\right)_{dU=0} < 0$$

أي أن الأثر الإحلالي لتغيّر السعر يكون *دائمًا* سالبًا ، فإذا ارتفع سعر السلعة فإن الطلب عليها يقل بسبب الأثر الإحلالي ، وعلى العكس من ذلك إذا انخفض سعر السلعة فإن الطلب عليها يزداد بسبب الأثر الإحلالي .

أي أن الأثـر الإحلالي لتغيّر السعر يؤدي دائمًا إلى علاقة عكسية بين الطلب والسعر ، وقد كان أنصار المدخل التقليدي يعتقدون فقط في الأثر الإحلالي ؛ ومن ثم فإنه طبقًا لهذا المدخل تكون العلاقة بين الطلب والسعر *لأي سلعة* علاقة عكسية .

إلا أن الأثر الدخلي لتغير السعر قد يكون موجبًا أو سالبًا، إذ يتوقف على إشارة

$$\frac{dx_1}{dM}$$

أي أن سالبية الأثر الإحلالي لا تضمن بالضرورة عكسية العلاقة بين الطلب والسعر. أي أنه ليس هناك ما يضمن أن منحنى الطلب سوف يتجه إلى أسفل نحو اليمين كما اعتقد التقليديون.

ولما كان أثر التغيّر في السعر، كما سبق أن رأينا، يتحدد بالعلاقة الآتية:

$$\frac{dx_1}{dp_1} = \frac{-\lambda\, p_2^2}{\bar{S}_2} - x_1 \frac{dx_1}{dM}$$

فإنه يمكننا التمييز بين ثلاث حالات.

(٢ ـ ٣ ـ ١) حالة السلع العادية

في هذه الحالة يكون الأثر الإحلالي سالبًا أو:

$$\frac{-\lambda\, p_2^2}{\bar{S}_2} < 0$$

ويكون الأثر الدخلي موجبًا أو:

$$\frac{dx_1}{dM} > 0$$

وبذا يكون الأثر السعري سالبًا أو:

$$\frac{dx_1}{dp_1} = \frac{-\lambda\, p_2^2}{\bar{S}_2} - x_1 \frac{dx_1}{dM} < 0$$

أي أن منحنى الطلب ينحدر إلى أسفل نحو اليمين.

(٢ - ٣ - ٢) حالة السلع الرديئة (ولكن ليست من نوع جفن)

في هذه الحالة يكون الأثر الإحلالي سالبًا أو:

$$\frac{-\lambda\, p_2^2}{\bar{S}_2} < 0$$

ويكون الأثر الدخلي أيضًا *سالبًا* أو:

$$\frac{dx_1}{dM} < 0$$

إلا أن:

$$\left| \frac{-\lambda\, p_2^2}{\bar{S}_2} \right| > \left| -x_1 \frac{dx_1}{dM} \right|$$

أي أن القيمة المطلقة للأثر الإحلالي السالب تفوق القيمة المطلقة للأثر الدخلي السالب مضروبًا في ($-x_1$) ، وبذا يكون الأثر السعري سالبًا أو:

$$\frac{dx_1}{dp_1} < 0$$

أي على الرغم من أن الأثر الدخلي سالبًا، فإن قوة الأثر الإحلالي تؤدي إلى وجود علاقة عكسية بين السعر والطلب؛ أي يتجه منحنى طلب السلع الرديئة (التي ليست من نوع جفن) إلى أسفل نحو اليمين.

(٢ ـ ٣ ـ ٣) حالة سلعة جفن

في هذه الحالة يكون الأثر الإحلالي سالبًا أي :

$$\frac{-\lambda p_2^2}{\bar{S}_2} < 0$$

ويكون الأثر الدخلي *سالبًا* أيضًا أو:

$$\frac{dx_1}{dM} < 0$$

إلا أن القيمة المطلقة للأثر الإحلالي السالب تكون أقل من القيمة المطلقة للأثر الدخلي السالب مضروبة في $(-x_1)$ أو:

$$\left| \frac{-\lambda p_2^2}{\bar{S}_2} \right| < \left| -x_1 \frac{dx_1}{dM} \right|$$

وهكذا نحصل على علاقة موجبة بين السعر والطلب أو:

$$\frac{dx_1}{dp} > 0$$

أي يتجه منحنى الطلب في حالة سلعة جفن إلى أعلى نحو اليمين على عكس المنحنى المألوف.

ومن ثم يتّضح أن مدخل منحنيات السواء قد مكّننا من استنتاج العلاقة بين السعر والطلب في جميع الحالات، وليس بالنسبة للسلع العادية فقط. كما أوضح هذا المدخل أن هناك حالات لا تكون فيها العلاقة بين الطلب والسعر علاقة عكسية؛ وإن كانت حالات شاذة [Samuelson, Cambridge 1948].

(٢ - ٤) نموذج التفضيل الظاهري

يحاول هذا النمـوذج أن يبني نظرية لسلوك المستهلك خالية تمامًا من الإشارة لمصطلح المنفعة. ويقوم النموذج على فكرة بسيطة وهي أن المستهلك يقرر شراء سلة معينة من السلع بدلاً من شراء سلة أخرى، إما لأنها أرخص، أو لأنه يفضل محتوياتها على محتويات الأخرى. فإذا كان هناك سلعتان (أو مجموعتان) A, B ، وكانت السلعة A تكلف أكثر من السلعة B ؛ فإذا اشترى المستهلك السلعة A فإنه يكون قد فعل ذلك لتفضيله شراء محتـويات هذه السلة على محتويات السلة الأخرى؛ أي أن المستهلك يظهر تفضيلاً للسلة A ولذلك سمي النموذج بنموذج التفضيل الظاهري. وهكذا فإن القاعدة الرئيسة التي يقوم عليها هذا النموذج هي العلاقة بين سلة السلع A التي يشتريها المستهلك بأسعار p^a وبدخل قدره $p^a A$ وسلة السلع B التى كان من الممكن أن يشتريها المستهلك بالدخل نفسه $p^a A$ وبالأسعار نفسها p^a وبتكلفة $p^a B$ التي تساوي، أو تقل عن دخله $p^a A$ ، ويمكن التعبير عن هذه العلاقة كما يأتي:

$$p^a B \leqslant p^a A$$

وطبقًا لهذه العلاقة تكون تكلفة السلـة A بأسعار p^a أكبر من تكلفة السلة B أو مساويةً لها. وتفسر العلاقة بأن المستهلك يفضل السلة A على السلة B ، وبذا فإن السلة B تظهر أقل قبولاً للمستهلك، بينما السلة A تظهر أكثر قبولاً من السلة B لهذا المستهلك، ومدلول هذه العلاقة أنه:

إذا كانت

$$A \neq B$$

وكانت

$$p^a B \leqslant p^a A$$

فإن

$$p^b B < p^b A$$

إذن لم يقـرر المستهلك شراء السلة B بأسعار p^b وهذا معناه أنه عند مستوى الدخل والأسعار الذي يقرر المستهلكِ بموجبها شراء السلة B لابد وأن تكون السلة A غالية

جدًّا، وإلا فإنـه ما كان يتردد في شراء السلة A. ويجب ملاحظة أن علاقة التفضيل الظاهري ليست متماثلة أي أن كون :

$$p^b B < p^b A$$

ليس معناه بالضرورة أن تكون :

$$p^a B \leqslant p^a A$$

ومن الخصائص أعلاه يمكن استنتاج العلاقة الأساسية التالية :

إذا كانت

$$p \, \Delta x = 0$$

فإن

$$\Delta p \, \Delta x < 0$$

حيث

$$\Delta p = p^a - p^b$$

وحيث :

$$\Delta x = A - B$$

ويمكن *إثبات هذه العلاقة كالآتي* :

نفترض أن هناك تفضيلاً ظاهريًّا للسلة A على السلة B عند مستوى الأسعار p^a فإنه في هذه الحالة تكون :

$$p^a A \geqslant p^a B \qquad (1)$$

والتي تعني أن :

$$p^b A > p^b B \qquad (2)$$

وبالمثل نفترض أن مستوى الأسعار هو p^b ، وأنه عند هذا المستوى يظهر المستهلك تفضيلاً للسلة B على السلة A فإنه في هذه الحالة نحصل على :

$$p^b B \geqslant p^b A \qquad (3)$$

والتي تعني أن :

$$p^a B > p^a A \qquad (4)$$

ويجب الإشارة إلى أن p ، x عبارة عن متجهات بحيث :

$$p = [p_1, p_2, \ldots, p_n]$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix}$$

وبحيث :

$$\Delta p = [p_1^a - p_1^b, \ldots, p_n^a - p_n^b]$$

وبـطرح الجـانب الأيمن من المتباينة (4) من الجانب الأيسر من المتباينة (2) ، وكذلك بطرح الجانب الأيسر من المتباينة (4) من الجانب الأيمن من المتباينة (2) نحصل على :

$$p^b B - p^a B - p^b A + p^a A < 0$$

أو:

$$(p^a - p^b)(A - B) < 0$$

والتي يمكن كتابتها كالآتي :

$$\Delta p \, \Delta x < 0$$

وإذا افترضنا من العلاقات (1) ، (3) أن :

$$p^a A = p^a B$$

$$p^b B = p^b A$$

فإننا نحصل على:

$$p^a (A - B) = 0$$
$$p^b (A - B) = 0$$

أو:

$$p^a \Delta x = 0$$
$$p^b \Delta x = 0$$

بحيث لا تكون كل $\Delta x_i = 0$.

وملخص ما تقدم أنه:

إذا كان

$$p \Delta x = 0$$

فإن:

$$\Delta p \Delta x < 0 \quad \ldots (5)$$

وباستخدام هذه العلاقات الأساسية لنموذج التفضيل الظاهري يمكننا استنتاج قانون عام للطلب.

لنفترض أن دوال الاختيار هي:

$$x_1 = \phi(p_1, p_2, M)$$
$$x_2 = \psi(p_1, p_2, M)$$

حيث:

$$p_1 > 0, p_2 > 0, M > 0$$

وحيث x_1, x_2 كميات من السلعتين في سلة معيَّنة:

$$x_1 > 0; x_2 > 0$$

وسوف نفترض أن دالة الاختيار ذات قيمة فردية وأنها مستمرة، كما نفترض أن المستهلك سوف يقوم بإنفاق كل دخله.

ومن دوال الاختيار أعلاه نحصل على :

$$dx_1 = \frac{\partial \phi}{\partial p_1} dp_1 + \frac{\partial \phi}{\partial p_2} dp_2 + \frac{\partial \phi}{\partial M} dM$$

$$dx_2 = \frac{\partial \psi}{\partial p_1} dp_1 + \frac{\partial \psi}{\partial p_2} dp_2 + \frac{\partial \psi}{\partial M} dM$$

ولكن

$$M = p_1 x_1 + p_2 x_2$$

إذن :

$$dM = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + x_1 dp_1 + x_2 dp_2$$

وطبقًا للعلاقة الرئيسة في (5) أعلاه نحصل على :

$$p_1 dx_1 + p_2 dx_2 = 0 \quad \ldots (6)$$

$$dp_1\, dx_1 + dp_2\, dx_2 < 0 \quad \ldots (7)$$

وبالتعويض من (6) في معادلة dM نحصل على :

$$dM = x_1\, dp_1 + x_2\, dp_2$$

وبالتعويض من هذه المعادلة في معادلتي dx_1, dx_2 نحصل على :

$$dx_1 = \frac{\partial \phi}{\partial p_1} dp_1 + \frac{\partial \phi}{\partial p_2} dp_2 + \frac{\partial \phi}{\partial M} (x_1\, dp_1 + x_2\, dp_2)$$

$$dx_2 = \frac{\partial \psi}{\partial p_1} dp_1 + \frac{\partial \psi}{\partial p_2} dp_2 + \frac{\partial \psi}{\partial M} (x_1\, dp_1 + x_2\, dp_2)$$

وبالتعويض من هاتين المعادلتين الأخيرتين في المتباينة (7) نحصل على :

$$\frac{\partial\phi}{\partial p_1} dp_1^2 + \frac{\partial\phi}{\partial p_2} dp_1\,dp_2 + x_1 \frac{\partial\phi}{\partial M} dp_1^2 + x_2 \frac{\partial\phi}{\partial M} dp_1\,dp_2$$

$$+ \frac{\partial\psi}{\partial p_1} dp_1\,dp_2 + \frac{\partial\psi}{\partial p_2} dp_2^2 + x_1 \frac{\partial\psi}{\partial M} dp_1\,dp_2 + x_2 \frac{\partial\psi}{\partial M} dp_2^2 < 0$$

وبجمع المفردات نحصل على :

$$\left[\frac{\partial\phi}{\partial p_1} + x_1 \frac{\partial\phi}{\partial M} \right] dp_1^2 + \left[\frac{\partial\phi}{\partial p_2} + x_2 \frac{\partial\phi}{\partial M} \right] dp_1\,dp_2$$

$$+ \left[\frac{\partial\psi}{\partial p_1} + x_1 \frac{\partial\psi}{\partial M} \right] dp_1\,dp_2 + \left[\frac{\partial\psi}{\partial p_2} + x_2 \frac{\partial\psi}{\partial M} \right] dp_2^2 < 0$$

والعلاقة الأخيرة عبارة عن صيغة تربيعية سالبة بالتحديد.

وهذا معناه أن :

$$\frac{\partial\phi}{\partial p_1} + x_1 \frac{\partial\phi}{\partial M} < 0$$

وأن :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial p_1} + x_1 \frac{\partial\phi}{\partial M} & \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial p_2} + x_2 \frac{\partial\phi}{\partial M}\right) + \left(\frac{\partial\psi}{\partial p_1} + x_1 \frac{\partial\psi}{\partial M}\right)\right] \\ \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial p_2} + x_2 \frac{\partial\phi}{\partial M}\right) + \left(\frac{\partial\psi}{\partial p_1} + x_1 \frac{\partial\psi}{\partial M}\right)\right] & \left(\frac{\partial\psi}{\partial p_1} + x_1 \frac{\partial\psi}{\partial M}\right)\right] \end{vmatrix}$$

إلا أنه من تعريف دالة الاختيار تكون :

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_1} = \frac{\partial \phi}{\partial p_1}$$

$$\frac{\partial x_1}{dM} = \frac{\partial \phi}{dM}$$

وبناءً على ذلك يمكننا أن نستنتج قانونًا عامًّا للطلب باستخدام مضمون الصيغة التربيعية أعلاه، فمن المتباينة :

$$\frac{\partial \phi}{\partial p_1} + x_1 \frac{\partial \phi}{\partial M} \quad < \quad 0$$

نحصل على :

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_1} \quad < \quad 0$$

طالما أن :

$$\frac{\partial x_1}{\partial M} \quad > \quad 0$$

أي أن الطلب على السلعة ينحدر إلى أسفل نحو اليمين إذا كان الأثر الدخلي موجبًا وهذه هي حالة السلع العادية.

إلا أن المتباينة نفسها توضِّح أن :

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_1} \quad > \quad 0$$

إذا كان:

$$\frac{\partial x_1}{\partial M} < 0$$

وكان:

$$\left| x_1 \frac{\partial x_1}{\partial M} \right| > \frac{\partial x_1}{\partial p_1}$$

أي أن الطلبَ على السلعة يكون ذا علاقة طردية مع سعرها (أي يتجه إلى *أعلى* نحو اليمين) إذا كان الأثر الدخلي *سالبًا وقويًّا*، وهذه هي حالة سلعة جفن.

ويتضح أن نموذج التفضيل الزمني يمكننا من استنتاج قانون عام للطلب بأسلوب يخلو تمامًا من الإشارة إلى مصطلح المنفعة.

وطبقًا لهذا النموذج تزداد الكمية المطلوبة من السلعة إذا انخفض ثمنها، طالما أن الزيادة في دخل الفرد التي تنتج عن هذا التخفيض في الثمن تؤدي إلى زيادة الطلب على السلعة.

وتنقص الكمية المطلوبة من السلعة إذا انخفض ثمنها، وذلك إذا أدَّت زيادة الدخل التي تنتج عن الانخفاض في السعر إلى نقص الكمية المطلوبة من هذه السلعة.

(٢ ـ ٥) توازن المستهلك ومرونة الإحلال

تعرف مرونة الإحلال بين سلعتين x_1, x_2 بأنها هي النسبة بين سالب التغير النسبي في النسب المستهلكة من السلعتين إلى التغير النسبي في نسب أسعارهما، ويعبر عنها كالآتي :

$$\sigma_{12} = -\frac{d\left(\frac{x_1}{x_2}\right)}{\left(\frac{x_1}{x_2}\right)} \div \frac{d\left(\frac{p_2}{p_1}\right)}{\left(\frac{p_2}{p_1}\right)}$$

حيث σ_{12} ترمز إلى مرونة الإحلال .

ومن دراستنا لتوازن المستهلك عرفنا أنه عند التوازن تكون :

$$\frac{MU_1}{p_1} = \frac{MU_2}{p_2} = \lambda$$

فإذا كان لدينا دالة منفعة :

$$U = \phi(x_1, x_2)$$

وكان قيد الدخل :

$$M = p_1 x_1 + p_2 x_2$$

فإنه عند التوازن (أي عند تعظيم المنفعة بعد أخذ شرط القيد في الاعتبار) نحصل على :

$$\frac{\phi_1}{p_1} = \frac{\phi_2}{p_2} = \lambda$$

أو:

$$p_1 = \phi_1 / \lambda \,;\, p_2 = \phi_2 / \lambda$$

وبتعويض هذه القيم في معادلة المرونة نحصل على:

$$\sigma_{12} = -\frac{d\left(\frac{x_1}{x_2}\right)}{\left(\frac{x_1}{x_2}\right)} \div \frac{d\left(\frac{\phi_2}{\phi_1}\right)}{\left(\frac{\phi_2}{\phi_1}\right)}$$

أو:

$$\sigma_{12} = -\frac{d\left(\frac{x_1}{x_2}\right)}{\left(\frac{x_1}{x_2}\right)} \cdot \frac{\left(\frac{\phi_2}{\phi_1}\right)}{d\left(\frac{\phi_2}{\phi_1}\right)}$$

لكن:

$$d\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \frac{x_2\, dx_1 - x_1\, dx_2}{x_2^2} \qquad (1)$$

كما أن:

$$d\left(\frac{\phi_2}{\phi_1}\right) = \frac{\phi_2^1\, \phi_1 - \phi_1^1\, \phi_2}{\phi_1^2}$$

$$d\left(\frac{\phi_2}{\phi_1}\right) = \frac{(\phi_{21}\, dx_1 + \phi_{22}\, dx_2)\, \phi_1 - (\phi_{11}\, dx_1 + \phi_{12}\, dx_2)\, \phi_2}{\phi_1^2}$$

أي أن:

$$d\left(\frac{\phi_2}{\phi_1}\right) = \frac{\phi_1\, \phi_{21}\, dx_1 + \phi_1\, \phi_{22}\, dx_2 - \phi_2\, \phi_{11}\, dx_1 - \phi_2\, \phi_{12}\, dx_2}{\phi_1^2} \qquad (2)$$

وبتعـويض المعادلتين (1) ، (2) في معادلة المرونة وإجراء بعض الاختصارات البسيطة نحصل على :

$$\sigma_{12} = -\frac{\phi_1 \phi_2}{x_1 x_2} \cdot \frac{x_2\, dx_1 - x_1\, dx_2}{\phi_1 \phi_{21}\, dx_1 + \phi_1 \phi_{22}\, dx_2 - \phi_2 \phi_{11}\, dx_1 - \phi_2 \phi_{12}\, dx_2}$$

وبقسمة بسط ومقام المعادلة الأخيرة على dx_1 نحصل على :

$$\sigma_{12} = -\frac{\phi_1 \phi_2}{x_1 x_2} \cdot \frac{x_2 - x_1 \dfrac{dx_2}{dx_1}}{\phi_1 \phi_{21} + \phi_1 \phi_{22} \dfrac{dx_2}{dx_1} - \phi_2 \phi_{11} - \phi_2 \phi_{12} \dfrac{dx_2}{dx_1}}$$

لكن عند التوازن تكون :

$$r = \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\phi_1}{\phi_2}$$

وبتعويض هذه النتيجة في معادلة σ_{12} نحصل على :

$$\sigma_{12} = -\frac{\phi_1 \phi_2}{x_1 x_2} \cdot \frac{x_2 + x_1 \dfrac{\phi_1}{\phi_2}}{\phi_1 \phi_{21} - \dfrac{\phi_1^2 \phi_{22}}{\phi_2} - \phi_2 \phi_{11} + \dfrac{\phi_2 \varepsilon_{12} \phi_1}{\phi_2}}$$

وباختصار ϕ_2 في كل من البسط والمقام نحصل على :

$$\sigma_{12} = \frac{\phi_1 \phi_2}{x_1 x_2} \cdot \frac{x_1 \phi_1 + x_2 \phi_2}{\phi_1^2 \phi_{22} - 2\phi_1 \phi_2 \phi_{12} + \phi_2^2 \phi_{11}}$$

وهي معـادلة مرونة الإحلال بين السلعتين x_1 ، x_2 عندما يكون المستهلك قد حقق أقصى إشباع ممكن .

ويمكن اختصار وتعميم هذه المعادلة كالآتي :
يلاحظ أن الكمية

$$\phi_1^2 \phi_{22} - 2\phi_1 \phi_2 \phi_{12} + \phi_2^2 \phi_{11}$$

تساوي سالب قيمة محددة هيشيان المطوقة الآتية :

$$-\bar{S}_2^* = \begin{vmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & -\phi_1 \\ \phi_{21} & \phi_{22} & -\phi_2 \\ -\phi_1 & -\phi_2 & 0 \end{vmatrix}$$

كما يلاحظ أن الكمية $\phi_1 \phi_2$ هي العامل المساعد للصف الأول والعمود الثاني في المحددة $\bar{S}_2^*$ أي أن :

$$\bar{S}_{12}^{**} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} \phi_{21} & -\phi_2 \\ -\phi_1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(-\phi_1 \phi_2) = \phi_1 \phi_2$$

وهكذا يمكن كتابة معادلة مرونة الإحلال كالآتي :

$$\sigma_{12} = -\frac{\sum_{i=1}^{2} x_i \phi_i}{x_1 x_2} \cdot \frac{\bar{S}_{12}^{**}}{\bar{S}_2^*}$$

وبصفة عامة، فإنه يمكن التعبير عن مرونة الإحلال بين أي سلعتين x_i ، x_j كالآتي :

$$\sigma_{ij} = -\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \phi_i}{x_i x_j} \cdot \frac{\bar{S}_{ij}^{**}}{\bar{S}_n^*}$$

حيث :

$$\bar{S}_n^* = \begin{vmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1n} & -\phi_1 \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2n} & -\phi_2 \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \cdots & \phi_{nn} & -\phi_n \\ -\phi_1 & -\phi_2 & \cdots & -\phi_2 & 0 \end{vmatrix}$$

وحيث $\bar{S}_{ij}^{**}$ العامل المساعد للصف i وللعمود j في محددة $\bar{S}_n^{**}$.

ويلاحظ أنه :

(١) إذا كانت $\sigma_{ij} > 0$ فإن السلعتين x_i, x_j تكونان سلعتين بديلتين أو متنافستين .

(٢) وإذا كانت $\sigma_{ij} < 0$ فإن السلعتين x_i, x_j تكونان مكملتين .

(٣) وإذا كانت $\sigma_{ij} = 0$ فإن السلعتين تكونان محايدتين .

مثال

حدِّد طبيعة العلاقة بين السلعتين x_1 ، x_2 إذا كانت دالة المنفعة :

$$U = 1 - x_1^2 x_2$$

وكان المستهلك في حالة توازن .

نحاول استنتاج قيمة مرونة الإحلال باستخدام المعادلة :

$$\sigma_{12} = -\frac{\sum_{i=1}^{2} x_i \phi_i}{x_1 x_2} \cdot \frac{\bar{S}_{12}^{**}}{\bar{S}_2^*}$$

حيث إن لدينا سلعتين فقط .

نحصل من دالة المنفعة أعلاه على :

$$\phi_1 = -2x_1 x_2 ; \phi_2 = -x_1^2$$
$$\phi_{11} = -2x_2 ; \phi_{22} = 0$$
$$\phi_{12} = \phi_{21} = -2x_1$$

نستنتج قيمة محددة هيشيان المطوقة $\bar{S}_2^*$ حيث :

$$\bar{S}_2^* = \begin{vmatrix} -2x_2 & -2x_1 & 2x_1 x_2 \\ -2x_1 & 0 & x_1^2 \\ 2x_1 x_2 & x_1^2 & 0 \end{vmatrix} = -6 x_1^4 x_2$$

وتكون قيمة $\bar{S}_{12}^{**}$ مساوية :

$$\bar{S}_{12}^{**} = -\begin{vmatrix} -2x_1 & x_1^2 \\ 2x_1 x_2 & 0 \end{vmatrix} = 2x_1^3 x_2$$

أما قيمة $\sum_{i=2}^{2} x_i \phi_i$ فتساوي :

$$\sum_{i=1}^{2} x_i \phi_i = x_1 \phi_1 + x_2 \phi_2 = -3x_1^2 x_2$$

وبالتعويض في معادلة مرونة الإحلال نحصل على :

$$\sigma_{12} = -\frac{-3x_1^2 x_2}{x_1 x_2} \cdot \frac{2x_1^3 x_2}{-6x_1^4 x_2} = -1$$

وهكذا فإن السلعتين x_1 ، x_2 تكونان متكاملتين .

(٢ ـ ٦) العلاقة بين مرونة الإحلال ومرونة الدخل ومرونة الطلب التقاطعية

لقد رأينا أنه إذا كان لدينا دالة منفعة :

$$U = \phi(x_1, x_2)$$

وقيد دخل :

$$M = p_1 x_1 + p_2 x_2$$

فإن تعظيم الإشباع يتحقق عندما تكون :

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \phi_1 - \lambda p_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \phi_2 - \lambda p_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = M - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0$$

حيث L هي دالة لاجرانج وتساوي :

$$L = \phi(x_1, x_2) + \lambda(M - p_1 x_1 - p_2 x_2)$$

والشرط الكافي للتوازن هو:

$$\bar{S}_2 = \begin{vmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & -p_1 \\ \phi_{21} & \phi_{22} & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{vmatrix} > 0$$

ومن معادلات التوازن أعلاه نحصل على :

$$\phi_{11} dx_1 + \phi_{12} dx_2 - p_1 d\lambda = \lambda dp_1$$

$$\phi_{21} dx_1 + \phi_{22} dx_2 - p_2 d\lambda = \lambda dp_2$$

$$- p_1 dx_1 - p_2 dx_2 = x_1 dp_1 + x_2 dp_2 - dM$$

وباستخدام قاعدة كرايمر في حلِّ المعادلات الآنية نحصل على :

$$dx_1 = \frac{\begin{vmatrix} \lambda dp_1 & \phi_{12} & -p_1 \\ \lambda dp_2 & \phi_{22} & -p_2 \\ x_1dp_1 + x_2dp_2 - dM & -p_2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & -p_1 \\ \phi_{21} & \phi_{22} & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{vmatrix}}$$

ويتضح من هذا الحل أن المقام ليس إلا الشرط الكافي لتحقيق التوازن، أي أن :

$$dx_1 = \frac{\begin{vmatrix} \lambda dp_1 & \phi_{12} & -p_1 \\ \lambda dp_2 & \phi_{22} & -p_2 \\ x_1dp_1 + x_2dp_2 - dM & -p_2 & 0 \end{vmatrix}}{\bar{S}_2} \qquad (1)$$

ولـو افترضنا ثبات سعر السلعة x_1 ، وكذلك الدخل. فإنه يمكننا استنتاج التغير في الطلب على هذه السلعة بالنسبة لتغير سعر السلعة الأخرى.
أي بافتراض أن :

$$dp_1 = dM = 0$$

فإننا نحصل على :

$$dx_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \phi_{12} & -p_1 \\ \lambda dp_2 & \phi_{22} & -p_2 \\ x_2 dp_2 & -p_2 & 0 \end{vmatrix}}{\bar{S}_2}$$

ومن هذه المعادلة نحصل على :

$$\frac{dx_1}{dp_2} = -\lambda \frac{\begin{vmatrix} \phi_{12} & -p_1 \\ -p_2 & 0 \end{vmatrix}}{\bar{S}_2} + x_2 \frac{\begin{vmatrix} \phi_{12} & -p_1 \\ \phi_{22} & -p_2 \end{vmatrix}}{\bar{S}_2}$$

لكن المحددة $\begin{vmatrix} \phi_{12} & -p_1 \\ -p_2 & 0 \end{vmatrix}$ ما هي إلا العامل المساعد للصف الأول والعمود الثاني في محددة هيشيان المطوقة $\bar{S}_2$ ، كما أن المحددة $\begin{vmatrix} \phi_{12} & -p_1 \\ \phi_{22} & -p_2 \end{vmatrix}$ ما هي إلا العامل المساعد للصف الثالث والعمود الأول في محددة هيشيان المطوقة $\bar{S}_2$. وبذا يمكن كتابة المعادلة $\frac{dx_1}{dp_2}$ كالآتي :

$$\frac{dx_1}{dp_2} = \frac{\lambda \bar{S}^*_{12}}{\bar{S}_2} + \frac{x_2 \bar{S}^*_{31}}{\bar{S}_2} \qquad (2)$$

ولنفترض الآن ثبات الأسعار وتغير الدخل أي نفترض :

$$dp_1 = dp_2 = 0$$

$$dM \neq 0$$

فسنحصل من المعادلة (1) على :

$$dx_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \phi_{12} & -p_1 \\ 0 & \phi_{22} & -p_2 \\ -dM & -p_2 & 0 \end{vmatrix}}{\bar{S}_2}$$

ومن هذه المعادلة الأخيرة نحصل على :

$$\frac{dx_1}{dM} = - \frac{\begin{vmatrix} \phi_{12} & -p_1 \\ \phi_{22} & -p_2 \end{vmatrix}}{\bar{S}_2}$$

وتوضح هذه المعادلة أثر تغيّر الدخل على الطلب على السلعة x_1 ، مع ثبات الأسعار (أي الأثر الدخلي لتغيّر السعر) . ويمكن التعبير عنها بصورة أخرى كالآتي :

$$\frac{dx_1}{dM} = -\frac{\bar{S}^*_{31}}{\bar{S}_2} \tag{3}$$

وبضرب المعادلة (2) في $-\frac{p_2}{x_1}$ وتعويض المعادلة (3) نحصل على :

$$\eta_{12} = -\frac{p_2}{x_1}\frac{dx_1}{dp_2} = -\lambda\frac{p_2}{x_1}\frac{\bar{S}^*_{12}}{\bar{S}_2} + \frac{x_2p_2}{x_1}\frac{dx_1}{dM}$$

حيث η_{12} ($= -\frac{p_2}{x_1}\frac{dx_1}{dp_2}$) تعبّر عن مرونة الطلب التقاطعية للسلعة x_1 بالنسبة لسعر السلعة x_2 (أي p_2) .

وبما أنه عند التوازن نحصل على :

$$\phi_i = \lambda\, p_i$$

فإنه بتعويض هذه القيمة في محددة هيشيان المطوقة $\bar{S}_2$ والعوامل المساعدة نحصل على :

$$\bar{S}^*_{ij} = \frac{1}{\lambda^2}\,\bar{S}^{**}_{ij}\ ;\ \bar{S}_n = \frac{1}{\lambda^2}\,\bar{S}^*_n$$

حيث :

$$\bar{S}^*_2 = \begin{vmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & -\phi_1 \\ \phi_{21} & \phi_{22} & -\phi_2 \\ -\phi_1 & -\phi_2 & 0 \end{vmatrix}$$

وهكذا يمكن كتابة معادلة المرونة التقاطعية كالآتي :

$$\eta_{12} = -\lambda\,\frac{p_2}{x_1}\quad\frac{\bar{S}^{**}_{12}}{\bar{S}^*_2} + \frac{x_2 p_2}{x_1}\quad\frac{dx_1}{dM}$$

ولكن توصلنا من دراستنا لمرونة الإحلال إلى النتيجة :

$$\sigma_{12} = -\frac{\sum_{i=1}^{2} x_i\,\phi_i}{x_1 x_2}\cdot\frac{\bar{S}^{**}_{12}}{\bar{S}^*_2}$$

وبتعويض هذه القيمة في معادلة المرونة التقاطعية نحصل على :

$$\eta_{12} = \lambda\,\frac{\frac{p_2}{x_1}\,\sigma_{12}\,x_1\,x_2}{\sum_{i=1}^{2} x_i\,\phi_i} + \frac{p_2}{x_1}\quad\frac{dx_1}{dM}$$

ولنفترض أن نسبة الدخل المنفقة على السلعة x_2 تساوي γ_2 أي أن :

$$\gamma_2 = \frac{p_2 x_2}{M} = \frac{p_2 x_2}{\sum_{i=1}^{2} p_i x_i}$$

وحيث إنه عند توازن المستهلك :

$$p_i = \frac{\phi_i}{\lambda}$$

فإنه عند التوازن نحصل على :

$$\gamma_2 = \frac{\phi_2 x_2}{\sum_{i=1}^{2} x_i \phi_i}$$

وبتعويض هذه القيمة في معادلة المرونة التقاطعية نحصل على :

$$\eta_{12} = \frac{\lambda p_2 \gamma_2 \sigma_{12}}{\phi_2} + \frac{x_2 p_2}{x_1} \cdot \frac{dx_1}{dM}$$

وبالتعويض عن قيمة λ عند التوازن، وبضرب وقسمة الجزء الثاني من الطرف الأيمن في γ_2 نحصل على :

$$\eta_{12} = \frac{\phi_2}{p_2} \cdot \frac{p_2}{\phi_2} \gamma_2 \sigma_{12} + \frac{M}{x_1} \quad \frac{x_2 p_2}{M} \quad \frac{dx_1}{dM}$$

وبالاختصار نحصل على :

$$\eta_{12} = \gamma_2 \sigma_{12} + \gamma_2 \left(\frac{M}{x_1} \cdot \frac{dx_1}{dM} \right)$$

إلا أن :

$$\epsilon_1 = \frac{M}{x_1} \cdot \frac{dx_1}{dM}$$

تمثّل مرونة الطلب الدخلية للسلعة x_1 ، وبذا فإن مرونة الطلب التقاطعية تساوي :

$$\eta_{12} = \gamma_2 \sigma_{12} + \gamma_2 \epsilon_1$$

أو:

$$\eta_{12} = \gamma_2 (\sigma_{12} + \epsilon_1)$$

$$\eta_{ij} = \gamma_i (\sigma_{ij} + \epsilon_j)$$

وكذلك :

$$\eta_{ii} = \gamma_i (\sigma_{ii} + \epsilon_i)$$

وتبين المعادلة الأولى أن مرونة الطلب التقاطعية η_{ij} بين سلعتين x_i ، x_j تتوقف على :

ا ـ النسبة من الدخل التي ينفقها المستهلك على السلعة x_i (γ_i).

ب ـ مرونة الطلب الدخلية على السلعة x_i (γ_i).

جـ ـ مرونة الإحلال بين السلعتين x_i ، x_j (σ_{ij}).

أما المعادلة الثانية فتوضح أن مرونة الطلب على السلعة بالنسبة لثمنها (η_{ii}) تساوي حاصل ضرب النسبة التي ينفقها المستهلك من دخله على هذه السلعة في مجموع مرونة الإحلال للسلعة بالنسبة لسعرها، ومرونة الطلب على السلعة نفسها بالنسبة للدخل [Theil, 1980].

(٢ ـ ٧) تمرينات

١) افرض أن هناك مستهلكين ا، ب وأن دالة منفعة كل منهما كالآتي :
المستهلك الأول :

$$U = x^{0.4} y^{0.6}$$

المستهلك الثاني :

$$U = 2x^{0.5} y^{0.25}$$

حيث x ، y تمثل سلعتين، فإذا كان سعر الوحدة من x هو $p_x = 2$ وسعر الوحدة من y هو $p_y = 3$ ، وكان كل مستهلك يمتلك دخلاً قدره $M = 45$.

(i) احسب كميات السلع التي تحقق التوازن لكل مستهلك. تأكد من تحقيق شروط التوازن الضرورية والكافية.

(ii) وضِّح كيف تؤدِّي زيادة الدخل إلى $M = 60$ إلى تغيير شروط التوازن أعلاه.

٢) إذا كانت دالة المنفعة لمستهلك ما هي :

$$U = x^{\alpha} y^{\beta}$$

أثبت أن طلب هذا المستهلك من السلعتين عبارة عن :

$$x = \alpha M / p_x (\alpha + \beta)$$

$$y = \beta M / p_y (\alpha + \beta)$$

حيث p_y ، p_x يمثِّلان سعر السلعتين وحيث M تمثِّل الدخل.

استنتج أن مرونة الطلب السعرية ومرونة الطلب الدخلية لكل سلعة تساوي واحدًا صحيحًا.

٣) بافتراض دالة المنفعة الآتية :

$$U = -18x_2 + 5x_1 x_2 - 0.5x_1^2 - 0.5x_2^2 + 8$$

وبافتراض أن $M = 5; p_1 = p_2 = 1$ احسب مرونة الطلب التقاطعية للسلعة x_1 إذا كانت مرونتها بالنسبة للدخل = 1.

٤) افترض دالة المنفعة الآتية :

$$U = 7x_1 + 7x_2 - x_1 x_2 - x_1^2 - x_2^2 + 7$$

وافـترض أن دخـل المستهلك $M = 7$ وأن سعـر السلعة x_1 هو $p_1 = 2$ بينما سعر السلعـة x_2 هو $p_2 = 3$. وضِّـح ما إذا كان التغيّر في سعر السلعة x_1 سوف يؤدِّي إلى أثر دخلي موجب على الطلب عليها، ثم استنتج ما إذا كانت هذه السلعة من نوع «جفن».

٥) وضِّـح بالنسبة لكـل من دوال المنفعـة الآتية ما إذا كانت السلعتـان x_1 ، x_2 متنافستين أو متكاملتين أو محايدتين :

$$U = \ln x_1 + e^{x_2}$$

$$U = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$$

$$U = e^{x_1 + x_2}$$

٦) إذا كانت دالة المنفعة هي :

$$U = x_1 x_2$$

احسب مرونـة الـطلب التقـاطعية للسلعـة x_1 بالنسبـة للسلعـة x_2 إذا كانت كمية الدخل المنفقة على السلعة x_2: $\gamma_2 = 0.05$ ، وكانت مرونة الطلب الدخلية للسلعة x_1 : $\epsilon_1 = 0.8$.

٧) بافتراض دالة المنفعة الآتية :

$$U = 2x_1 + 4x_2 + x_1 x_2 + 8$$

وبافتراض أن $p_1 = 5, p_2 = 10, M = 50$ أثبت :

(i) أن الأثر الدخلي لتغيّر سعر السلعة x_1 موجبًا.

(ii) أن الأثر الإحلالي لتغيّر سعر السلعة x_1 سالبًا.

الفصل الثالث

نظرية الإنتاج

(٣ - ١) دالة الإنتاج وتوازن المنتج

يعـرّف الإنتاج في الاقتصاد بأنه أي نشاط يؤدي إلى زيادة الكمية المنتجة من سلعـة أو خدمة ما، أو يؤدي إلى تغيّر في هيئة السلعة أو الخدمة بحيث تصبح أكثر ملاءمـة للاستهـلاك أو الاستخـدام، أو يؤدي إلى عملية توزيع تزيد من صلاحية الانتفاع بالسلعة أو الخدمة.

ويستخدم لفظ دالة الإنتاج للتعبير عن العلاقة بين الكمية المنتجة من سلعة ما وعناصر الإنتاج المستخدمة في إنتاج هذه السلعة، ويمكن كتابتها رياضيًّا كالآتي:

$$q = F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

حيث q الكمية المنتجة في وحدة زمنية معيَّنة، وحيث $x_1, \ldots, x_n$ كميات عناصر الإنتاج المستخدمة لإنتاج السلعة خلال الفترة الزمنية نفسها.

فلو افترضنا أن المنشأة تقوم بإنتاج سلعة ما باستخدام عنصري إنتاج هما x_1 ، x_2 فإن دالة الإنتاج يعبَّر عنها كالآتي:

$$q = \phi(x_1, x_2)$$

فإذا غيَّرت المنشأة الكمية المستخدمة من العنصر x_1 بمقدار قدره dx_1 ، والكمية

المستخدمة من العنصر x_2 بمقدار قدره dx_2 ، فإن مقدار الإنتاج يتغيَّر بكمية قدرها dq بحيث:

$$dq = \frac{\partial q}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial q}{\partial x_2} dx_2$$

فإذا افترضنا أن ؛ $dq = 0$ لحصلنا على:

$$\frac{\partial q}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial q}{\partial x_2} dx_2 = 0$$

وتمثِّل هذه المعادلة منحنى الناتج المتساوي الذي يعطي مجموعات من عنصري الإنتاج x_1, x_2 يمثِّل كل منها كمية إنتاج ثابتة، ويعبِّر عن ميل منحنى الناتج المتساوي بما يلي:

$$r = \frac{dx_1}{dx_2}$$

ومن المعادلة الأخيرة نحصل على:

$$r = \frac{dx_1}{dx_2} = -\frac{\partial q/\partial x_2}{\partial q/\partial x_1}$$

ويعرف هذا الميل بمعدّل الإحلال الفنيّ الحدِّي وواضح أنه يساوي النسبة بين الإنتاجية الحدِّية لعنصري الإنتاج. فإذا كانت الإنتاجية الحدِّية لكل عنصر موجبة فإن معدَّل الإحلال الحدِّي يكون سالبًا؛ أي أن منحنيات الناتج المتساوي تتجه إلى أسفل نحو اليمين.

مثال

نفترض دالة الإنتاج الآتية:

$$q = A\, x_1^{\alpha}\, x_2^{\beta}$$

حيث:

$$q, A, x_1, x_2 > 0$$
$$0 < \alpha < 1; 0 < \beta < 1$$

فإننا نجد أن معدَّل الإحلال الفنيِّ الحدِّي يساوي

$$r = -\frac{\partial q}{\partial x_2} / \frac{\partial q}{\partial x_1} = -\frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{x_1}{x_2} < 0$$

ويمكن تحديد ما إذا كان عنصر الإنتاج المعيَّن يخضع لقانون الغلة المتناقصة أم المتزايدة أم الثابتة وذلك بحساب:

$$\frac{\partial (Mp_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 q_i}{\partial x_i^2}$$

فإذا كانت القيمة سالبة دَلَّ ذلك على تناقص الإنتاجية الحدِّية (سريان قانون تناقص الغلة)، أما إذا كانت القيمة موجبة دَلَّ ذلك على تزايد الإنتاجية الحدِّية، وفي الحالة التي يكون فيها:

$$\frac{\partial^2 q_i}{\partial x_i^2} = 0$$

تكون الغلة (أو الإنتاجية الحدِّية) ثابتة.

كما يمكن أيضًا تحديد كيف تتغيَّر الإنتاجية الحدِّية لعنصر ما (x_1) نتيجة تغيّر العنصر الآخر (x_2) وذلك بحساب:

$$\frac{\partial (Mp_1)}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_2}$$

ويمكن إثبات أنه عندما تكون المنشأة في حالة توازن فإن الإنتاجية الحدِّية لكل

عنصر من عناصر الإنتاج تكون موجبة؛ أي أن اختيار المنشأة لأي نقطة على منحنى الناتج المتساوي إنما ينحصر في الجزء من المنحنى الذي يكون فيه الميل سالبًا.

لنفترض أن دالة الإنتاج تساوي:

$$q = \phi(x_1, x_2)$$

ولنفترض أن التكاليف الكلية:

$$C = p_1 x_1 + p_2 x_2$$

حيث p_1 ، p_2 أثمان عنصري الإنتاج x_1 ، x_2 ، $(p_1, p_2 > 0)$ ، ولنفترض أن الإيراد الكلي يساوي R حيث:

$$R = p \cdot q$$

ويمثل p السعر السوقي للإنتاج $(p > 0)$ ، بينما تمثل q كمية الإنتاج (أو المبيعات). وبعبارة أخرى فإننا نفترض منشأة تعمل في ظل ظروف المنافسة الكاملة حيث الهدف هو تحقيق أقصى ربح ممكن أو تعظيم:

$$\pi = R - C$$

أي تعظيم:

$$\pi = p\,\phi(x_1, x_2) - p_1 x_1 - p_2 x_2$$

ويتطلب هذا التعظيم توافر الشروط:

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_1} = p\phi_1 - p_1 = 0$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_2} = p\phi_2 - p_2 = 0$$

حيث ϕ_1 ، ϕ_2 يمثلان الإنتاجية الحدِّية للعنصرين x_1, x_2 وحيث:

قيمة الإنتاجية الحدِّية للعنصر $x_1 = p\,\phi_1$ ،

قيمة الإنتاجية الحدِّية للعنصر $x_2 = p\,\phi_2$

وهكذا فإنه عند التوازن يكون :

ثمن العنصر ا = قيمة الإنتاجية الحدِّية للعنصر ا

ثمن العنصر ب = قيمة الإنتاجية الحدِّية للعنصر ب

أو:

$$p_1 = p\phi_1; p_2 = p\phi_2$$

فإذا كانت :

$$p > 0; p_1 > 0; p_2 > 0$$

فإنه عند التوازن يكون :

$$\phi_1 > 0, \phi_2 > 0$$

أي أنه عند التوازن تكون الإنتاجية الحدِّية لكل عنصر موجبة وهو القول نفسه إنه عند التوازن ينحصر اختيار المنشأة في إحدى النقاط التي تقع على الجزء من منحنى الناتج المتساوي الذي يكون فيه ميل المنحنى سالبًا.

أما الشرط الكافي للتوازن في مثالنا السابق فيتطلب :

$$\phi_{11} < 0$$

$$\begin{vmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{vmatrix} > 0$$

ويمكن حل هذه المشكلة باستخدام دالة لاجرانج فنحصل على :

$$L = \phi(x_1, x_2) + \lambda(C - p_1 x_1 - p_2 x_2)$$

ويتحقق التوازن عندما :

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \phi_1 - \lambda p_1 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = \phi_2 - \lambda p_2 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = C - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0$$

وهي الشروط الضرورية للتوازن، ومن هذه الشروط يتضح أنه عند التوازن :

$$\phi_1 = \lambda p_1$$
$$\phi_2 = \lambda p_2$$

أو:

$$\frac{\phi_1}{\phi_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

أي أنه عند التوازن تكون :

$$\frac{\text{الإنتاجية الحدِّية للعنصر } x_1}{\text{الإنتاجية الحدِّية للعنصر } x_2} = \frac{\text{ثمن العنصر } x_1}{\text{ثمن العنصر } x_2}$$

ولكن سبق أن رأينا أن معدَّل الإحلال الحدِّي الفنيِّ :

$$r = \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\phi_1}{\phi_2}$$

ويتضح أنه عند التوازن يتساوى ميل منحنى سواء الإنتاج (الذي يعبِّر عن معدَّل الإحلال الحدِّي الفنيِّ) مع ميل خط التكلفة (الذي يعبِّر عن سالب نسبة أسعار عناصر الإنتاج) أو:

$$r = \frac{dx_2}{dx_1} = \quad \frac{p_1}{p_2}$$

ويلاحظ أن الشرط الكافي للتوازن يعطي :

$$\bar{S}_2 = \begin{vmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & -p_1 \\ \phi_{21} & \phi_{22} & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\bar{S}_2 = -p_2^2\phi_{11} + 2p_1 p_2 \phi_{12} - p_1^2\phi_{22} > 0$$

وبتعويض قيم p_1 ، p_2 عند التوازن نحصل على :

$$\frac{1}{\lambda^2}(-\phi_2^2\phi_{11} + 2\phi_1\phi_2\phi_{12} - \phi_1^2\phi_{22}) > 0$$

ولكن :

$$\frac{dr}{dx_2} = \frac{d}{dx_2}\left(\frac{dx_1}{dx_2}\right)$$

$$\frac{dr}{dx_2} = \frac{d}{dx_2}\left(\frac{-\phi_2}{\phi_1}\right)$$

$$\frac{dr}{dx_2} = \frac{-1}{\phi_1^3}(\phi_2^2\phi_{11} - 2\phi_1\phi_2\phi_{12} + \phi_1^2\phi_{22})$$

ومن المتباينة أعلاه نحصل على :

$$(-\phi_2^2\phi_{11} + 2\phi_1\phi_2\phi_{12} - \phi_1^2\phi_{22}) > 0$$

وذلك لأن : $\lambda^2 > 0$

وحيث إن (من الشرط الضروري لتوازن المنتج)

$$Mp_1 > 0$$

$$\phi_1 > 0$$

فإن :

$$\frac{dr}{dx_2} > 0$$

أي أن معدَّل الإحلال الحدِّي يكون موجبًا عند التوازن. وبمعنى آخر يكون منحنى الناتج المتساوي مقعرًا من أسفل بالقرب من نقطة الأصل [علي وعبدالبديع، ١٩٦٩م].

(٣ ـ ٢) دالة الإنتاج المتجانسة

إذا أدَّى تغيّر نسبي في عناصر الإنتاج إلى تغيّر في كمية الإنتاج مساوٍ لأس معيَّن من نسبة التغيّر في عناصر الإنتاج فإنه يقال إن دالة الإنتاج متجانسة وأن درجة التجانس هي الأس.

وبناءً على ذلك لو كان لدينا دالة الإنتاج :

$$q = \phi(x_1, x_2)$$

فإذا كانت λ مقدارًا ثابتًا وتحققت الخاصية

$$\phi(\lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda^n q$$

فإنه يقال إن الدالة q دالة متجانسة من درجة n. وإذا كانت $n = 1$ فإن الدالة تكون متجانسة من الدرجة الأولى أو دالة خطية متجانسة.

مثال

الدالة

$$q = 3x_1^4 + 2x_1^2 x_2^2 + 7x_2^4$$

متجانسة من الدرجة الرابعة وذلك لأن :

$$\begin{aligned}\phi(\lambda x_1, \lambda x_2) &= 3\lambda^4 x_1^4 + 2\lambda^4 x_1^2 x_2^2 + 7\lambda^4 x_2^4 \\ &= \lambda^4 q\end{aligned}$$

مثال

الدالة

$$q = \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}$$

متجانسة من درجة صفر وذلك لأن :

$$\phi(\lambda x_1, \lambda x_2) = \frac{\lambda^2 x_1 x_2}{\lambda^2 (x_1^2 + x_2^2)} = \lambda^0 q$$

وإذا كانت دالة الإنتاج متجانسة من درجة n فإن غلة الحجم تكون متزايدة إذا كانت $n > 1$ ، وتكـون الغلة متناقصة إذا كانت $n < 1$ ، وتكون الغلة ثابتة إذا كانت $n = 1$ ، وبعبارة أخرى فإن دوال الإنتاج المتجانسة من الدرجة الأولى تتمتع بثبات الغلة .[Solow, 1957]

(٣ ـ ٢ ـ ١) خصائص دوال الإنتاج المتجانسة

إذا كانت الدالة :

$$q = \phi(x_1, x_2)$$

متجانسة من درجة k فإنه يمكن إثبات أن :

$$q = x_1^k \phi\left(\frac{x_2}{x_1}\right) = x_2^k \psi\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \tag{i}$$

$$\frac{\partial q}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial q}{\partial x_2} \tag{ii}$$

تكونان متجانستين من درجة $k - 1$.

$$x_1 \frac{\partial q}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial q}{\partial x_2} = kq \tag{iii}$$

$$x_1^2 \frac{\partial^2 q}{\partial x_1^2} + 2 x_1 x_2 \frac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_2} + x_2^2 \frac{\partial^2 q}{\partial x_2^2} = k(k-1) q \tag{iv}$$

وسوف نقوم بإثبات هذه الخصائص في حالة الدالة الخطية المتجانسة :

(i) نفترض أن :

$$q = f(x_1, x_2)$$

دالة متجانسة من الدرجة الأولى، فإننا نحصل على :

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda f(x_1, x_2) = \lambda q$$

وذلك لأي قيمة من قيم λ.

فلو افترضنا أن :

$$\lambda = \frac{1}{x_1}$$

نحصل على :

$$f\left(\frac{x_1}{x_1}, \frac{x_2}{x_1}\right) = \frac{1}{x_1} f(x_1, x_2)$$

$$f\left(1, \frac{x_2}{x_1}\right) = \frac{1}{x_1} f(x_1, x_2)$$

$$x_1 f\left(1, \frac{x_2}{x_1}\right) = f(x_1, x_2)$$

$$x_1 f\left(1, \frac{x_2}{x_1}\right) = q$$

ومن ثم :

$$x_1 \phi\left(\frac{x_2}{x_1}\right) = q$$

وهكذا فإنه إذا كانت :

$$q = f(x_1, x_2)$$

دالة إنتاج متجانسة من الدرجة الأولى فإنه يمكن كتابتها بالصورة التالية :

$$q = x_1 \phi\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$$

$$q = x_2 \psi\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$$

وهو برهان الخاصية الأولى.

(ii) إذا كانت :

$$q = x_1 \phi \left(\frac{x_2}{x_1} \right)$$

فإن :

$$\frac{\partial q}{\partial x_1} = \phi \left(\frac{x_2}{x_1} \right) \frac{\partial x_1}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\phi \left(\frac{x_2}{x_1} \right) \right]$$

$$= \phi \left(\frac{x_2}{x_1} \right) + x_1 \phi' \left(\frac{x_2}{x_1} \right) \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{x_2}{x_1} \right)$$

$$= \phi \left(\frac{x_2}{x_1} \right) + x_1 \phi' \left(\frac{x_2}{x_1} \right) \left(\frac{-x_2}{x_1^2} \right)$$

وهكذا :

$$\frac{\partial q}{\partial x_1} = \phi \left(\frac{x_2}{x_1} \right) - \frac{x_2}{x_1} \phi' \left(\frac{x_2}{x_1} \right)$$

كما أنه إذا كانت :

$$q = x_1 \phi \left(\frac{x_2}{x_1} \right)$$

فإن :

$$\frac{\partial q}{\partial x_2} = \phi \left(\frac{x_2}{x_1} \right) \frac{\partial x_1}{\partial x_2} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \phi \left(\frac{x_2}{x_1} \right)$$

$$= \phi \left(\frac{x_2}{x_1} \right) (0) + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} \phi \left(\frac{x_2}{x_1} \right)$$

$$= \phi' \left(\frac{x_2}{x_1} \right)$$

وبناءً على ذلك فإنه إذا كانت دالة الإنتاج

$$q = f(x_1, x_2)$$

دالة خطّية متجانسة فإن الإنتاجيات الحدِّية :

$$\frac{\partial q}{\partial x_1} \; ; \; \frac{\partial q}{\partial x_2}$$

تصبح دوالاً فقط لمعدّل استخدام عنصري الإنتاج . أي دوالاً للمتغيّر $\frac{x_2}{x_1}$.

(iii) لقد أثبتنا أنه إذا كانت :

$$q = f(x_1, x_2)$$

دالة إنتاج خطية متجانسة فإن :

$$\frac{\partial q}{\partial x_1} = \phi\left(\frac{x_2}{x_1}\right) - \frac{x_2}{x_1}\phi'\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$$

$$\frac{\partial q}{\partial x_2} = \phi'\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$$

وبالجمع نحصل على :

$$\frac{\partial q}{\partial x_1}x_1 + \frac{\partial q}{\partial x_2}x_2$$

$$= x_1\phi\left(\frac{x_2}{x_1}\right) - x_2\phi'\left(\frac{x_2}{x_1}\right) + x_2\phi'\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$$

$$= x_1\phi\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$$

لكن سبق أن أثبتنا أن :

$$q = x_1 \phi \left(\frac{x_2}{x_1} \right)$$

وبالتعويض في المعادلة السابقة نحصل على :

$$x_1 \frac{\partial q}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial q}{\partial x_2} = q$$

وتعـرف هذه المعـادلـة الأخيرة بنظرية أويلر (Euler's) ، وطبقًا لهذه النظرية يساوي الإنتاج الكلي مجموع حاصل ضرب كل عنصر في إنتاجيته الحدِّية إذا كانت دالة الإنتاج متجانسة من الدرجة الأولى.

(iv) بأخذ التفاضل الجزئي لطرفيْ معادلة أويلر بالنسبة للمتغيّر x_1 نحصل على :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(x_1 \frac{\partial q}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial q}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial q}{\partial x_1}$$

ومن هذه المعادلة نحصل على :

$$x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial q}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial q}{\partial x_1} \quad \frac{\partial x_1}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial q}{\partial x_2} \right)$$

$$+ \frac{\partial q}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial x_1} = \frac{\partial q}{\partial x_1}$$

وبذا فإن :

$$x_1 \frac{\partial^2 q}{\partial x_1^2} + \frac{\partial q}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial q}{\partial x_1}$$

أي أن :

$$x_1 \frac{\partial^2 q}{\partial x_1^2} + x_2 \frac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$$

ومن هذه المعادلة الأخيرة نحصل على :

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x_1^2} = \frac{-x_2}{x_1} \quad \frac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_2}$$

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x_2^2} = \frac{-x_1}{x_2} \quad \frac{\partial^2 q}{\partial x_2 \partial x_1}$$

ومن هاتين المعادلتين نحصل على :

$$x_1^2 \frac{\partial^2 q}{\partial x_1^2} + x_2^2 \frac{\partial^2 q}{\partial x_2^2} + 2\, x_1\, x_2 \frac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_2} = 0$$

ويمكن بسهولة تعميم النتائج السابقة على دوال الإنتاج المتجانسة من درجة k.

(٣ ـ ٣) مرونـة الإحـلال

تعرف مرونة الإحلال بالتغيّر النسبي في نسب عناصر الإنتاج إلى التغير النسبي في الأسعار النسبية لهذه العناصر:

$$\sigma = \frac{d\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)}{\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)} \div \frac{d\left(\dfrac{p_2}{p_1}\right)}{\left(\dfrac{p_2}{p_1}\right)}$$

حيث x_1 تمثِّل الكمية المستخدمة من العنصر الأول
x_2 تمثِّل الكمية المستخدمة من العنصر الثاني
p_1 تمثِّل الوحدة من العنصر الأول
p_2 تمثِّل الوحدة من العنصر الثاني
ويمكننا استنتاج عدد من الصيغ لهذه المرونة التي تعبّر عن شكل منحنى الناتج المتساوي .

نحصل من تعريف مرونة الإحلال على :

$$\sigma = \frac{d\left(\frac{x_1}{x_2}\right)}{\left(\frac{x_1}{x_2}\right)} \cdot \frac{\left(\frac{p_2}{p_1}\right)}{d\left(\frac{p_2}{p_1}\right)}$$

ولما كان ميل منحنى الناتج المتساوي يساوي سالب ميل خط التكلفة عند توازن المنتج فإنه :

$$-\frac{p_2}{p_1} = \frac{dx_1}{dx_2}$$

وبتعويض هذه المعادلة الأخيرة في معادلة مرونة الإحلال نحصل على :

$$\sigma = \frac{d\left(\frac{x_1}{x_2}\right)}{\left(\frac{x_1}{x_2}\right)} \cdot \frac{\left(\frac{dx_1}{dx_2}\right)}{d\left(\frac{dx_1}{dx_2}\right)} \qquad (1)$$

إلا أن :

$$d\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \frac{x_2\,dx_1 - x_1\,dx_2}{x_2^2} \tag{2}$$

$$r = \frac{dx_1}{dx_2} \tag{3}$$

كما أن :

$$r = r\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$$

وهكذا فإن

$$dr = \frac{\partial r}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial r}{\partial x_2}\,dx_2 \tag{4}$$

وبالتعويض من المعادلات (2) ، (3) ، (4) في المعادلة (1) نحصل على :

$$\sigma = \frac{\dfrac{x_2\,dx_1 - x_1\,dx_2}{x_2^2}}{\dfrac{\partial r}{\partial x_1}\,dx_1 + \dfrac{\partial r}{\partial x_2}\,dx_2} \cdot \frac{r}{x_1/\,x_2} \tag{5}$$

ومن هذه المعادلة نحصل على :

$$\sigma = \frac{x_2\,dx_1 - x_1\,dx_2}{\dfrac{\partial r}{\partial x_1}\,dx_1 + \dfrac{\partial r}{\partial x_2}\,dx_2} \cdot \frac{r}{x_1 x_2}$$

وبضرب كل من البسط والمقام في $\frac{1}{dx_2}$ وتعويض قيمة $r = \frac{dx_1}{dx_2}$ نحصل على :

$$\sigma = \frac{r x_2 - x_1}{r \frac{\partial r}{\partial x_1} + \frac{\partial r}{\partial x_2}} \quad \frac{r}{x_1 x_2} \tag{6}$$

وهي صيغة أخرى من صيغ مرونة الإحلال .

ومن المعادلة (4) نحصل على :

$$\frac{dr}{dx_2} = \frac{\partial r}{\partial x_1} r + \frac{\partial r}{\partial x_2} \tag{7}$$

وبالتعويض من المعادلة (7) في المعادلة (6) نحصل على :

$$\sigma = \frac{r x_2 - x_1}{\frac{dr}{dx_2}} \cdot \frac{r}{x_1 x_2} \tag{8}$$

وهي صيغة ثالثة من صيغ مرونة الإحلال، وتوضِّح هذه الصيغة أن مرونة الإحلال تتنـاسب تناسبًا عكسيًا مع $\frac{dr}{dx_2}$، كما يلاحظ أن مرونة الإحلال تكون موجبة $\sigma > 0$ إذا كان منحنى النـاتـج المتساوي مقعـرًا بالنسبة لنقطة الأصل؛ أي إذا كانت $\frac{dr}{x_2} > 0$ وكان معدَّل الإحلال الحدِّي سالبًا $r < 0$ ولما كانت قيمة r عند التوازن تساوي

$$r = -\frac{\partial q}{\partial x_2} \div \frac{\partial q}{\partial x_1} = -\frac{\phi_2}{\phi_1} \tag{9}$$

وبالتعويض من المعادلة (9) في (8) نحصل على :

$$\sigma = \frac{x_2\left(\frac{-\phi_2}{\phi_1}\right) - x_1}{\left(\frac{-\phi_2}{\phi_1}\right)\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{-\phi_2}{\phi_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{-\phi_2}{\phi_1}\right)} \cdot \frac{\frac{-\phi_2}{\phi_1}}{x_1 x_2}$$

$$\sigma = \frac{x_2\left(\frac{\phi_2}{\phi_1}\right)^2 + x_1\left(\frac{\phi_2}{\phi_1}\right)}{\left(\frac{-\phi_2}{\phi_1}\right)\left(\frac{-\phi_1\phi_{21} + \phi_2\phi_{11}}{\phi_1^2}\right) + \frac{-\phi_1\phi_{22} + \phi_2\phi_{12}}{\phi_1^2}} \cdot \frac{1}{x_1 x_2}$$

وبضرب المقام وقسمته في ϕ_1^2 نحصل على :

$$\sigma = \frac{\frac{\phi_2}{\phi_1}\left(\frac{x_2\,\phi_2 + x_1\,\phi_1}{\phi_1}\right)}{\frac{\phi_1\phi_2\phi_{21}}{\phi_1^3} - \frac{\phi_2^2\phi_{11}}{\phi_1^3} - \frac{\phi_1^2\phi_{22}}{\phi_1^3} + \frac{\phi_1\phi_2\phi_{12}}{\phi_1^3}} \cdot \frac{1}{x_1 x_2}$$

وباختصار نحصل على :

$$\sigma = \frac{(x_1\,\phi_1 + x_2\,\phi_2)}{-\phi_1^2\,\phi_{22} - \phi_2^2\,\phi_{11} + 2\,\phi_1\,\phi_2\,\phi_{12}} \cdot \frac{\phi_1\phi_2}{x_1\,x_2} \qquad (10)$$

وهي الصيغة الرابعة من صيغ مرونة الإحلال، ويمكن استخدام المصفوفات في إعادة صياغة هذه المعادلة الأخيرة، فنحصل على :

$$\sigma_{12} = \frac{\sum_{i=1}^{2} x_i\,\phi_i}{x_1 x_2} \cdot \frac{\bar{S}_{12}^{**}}{\bar{S}_2^{*}} \qquad (11)$$

حيث :

$$\bar{S}_2^* = \begin{vmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & -\phi_1 \\ \phi_{21} & \phi_{22} & -\phi_2 \\ -\phi_1 & -\phi_2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\bar{S}_2^* = -\phi_1^2\,\phi_{22} - \phi_2^2\,\phi_{11} + 2\,\phi_1\,\phi_2\,\phi_{12}$$

وحيث $\bar{S}_{12}^{**}$ المصغر الأساس للمحددة $\bar{S}_2^*$ الذي يتبقى بعد حذف الصف الأول والعمود الثاني أو:

$$\bar{S}_{12}^{**} = \begin{vmatrix} \phi_{21} & -\phi_2 \\ -\phi_1 & 0 \end{vmatrix} = \phi_1\,\phi_2$$

وإذا كان هنـاك أكثـر من عنصري إنتاج ورغبنا في إيجاد مرونة الإحلال بين عنصرين منهما فإنه يمكننا تعميم المعادلة (11) أعلاه فنحصل على :

$$\sigma_{ij} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i\,\phi_i}{x_i x_j} \cdot \frac{\bar{S}_{ij}^{**}}{\bar{S}_n^*}$$

حيث :

$$\bar{S}_n^* = \begin{vmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1n} & -\phi_1 \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2n} & -\phi_2 \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \cdots & \phi_{nn} & -\phi_n \\ -\phi_1 & -\phi_2 & \cdots & -\phi_n & 0 \end{vmatrix}$$

وحيث $\bar{S}^{**}_{12}$ يمثّل المصغر الأساس للمحددة $\bar{S}^{*}_{n}$ الذي يتبقى بعد حذف الصف i والعمود j.

(٣ - ٣ - ١) مرونة الإحلال لدوال الإنتاج المتجانسة

تعطي الصيغة الرابعة من صيغ مرونة الإحلال المعادلة:

$$\sigma = \frac{(x_1 \phi_1 + x_2 \phi_2)}{-\phi_1^2 \phi_{22} - \phi_2^2 \phi_{11} + 2 \phi_1 \phi_2 \phi_{12}} \cdot \frac{\phi_1 \phi_2}{x_1 x_2}$$

إذا كانت دالة الإنتاج:

$$q = \phi(x_1, x_2)$$

ولكن إذا كانت هذه الدالة متجانسة من الدرجة الأولى فإنه طبقًا للخاصة الرابعة.

$$\phi_{11} = -\frac{x_2}{x_1} \phi_{12}$$

$$\phi_{22} = -\frac{x_1}{x_2} \phi_{21}$$

وبالتعويض من هاتين المعادلتين في صيغة مرونة الإحلال نحصل بالنسبة للدالة المتجانسة من الدرجة الأولى على:

$$\sigma = \frac{\phi_1 \phi_2}{x_1 x_2} \cdot \frac{(x_1 \phi_1 + x_2 \phi_2)}{\frac{\phi_1^2 x_1}{x_2} \phi_{12} + \frac{\phi_2^2 x_2}{x_1} \phi_{12} + 2 \phi_1 \phi_2 \phi_{12}}$$

أو:

$$\sigma = \frac{\phi_1 \phi_2 (x_1 \phi_1 + x_2 \phi_2)}{\phi_{12} (\phi_1^2 x_1^2 + \phi_2^2 x_2^2 + 2 \phi_1 \phi_2 x_1 x_2)}$$

ولكن من نظرية أويلر نحصل على:

$$q = \phi_1 x_1 + \phi_2 x_2$$

$$q^2 = \phi_1^2 x_1^2 + \phi_2^2 x_2^2 + 2\phi_1 \phi_2 x_1 x_2$$

وبالتعويض من هاتين المعادلتين في معادلة مرونة الإحلال نحصل على:

$$\sigma = \frac{q\,\phi_1 \phi_2}{q^2 \phi_{12}} = \frac{\phi_1 \phi_2}{q\,\phi_{12}}$$

وتمثّل هذه المعادلة صيغة مرونة الإحلال بالنسبة لدالة الإنتاج المنجانسة من الدرجة الأولى، ويمكن إعادة كتابتها كالآتي:

$$\sigma = \frac{\frac{\partial q}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial q}{\partial x_2}}{q \frac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_2}}$$

ويمكن تعميم مرونة الإحلال لدوال الإنتاج المتجانسة من درجة k فنحصل على:

$$\sigma = \frac{\phi_1 \phi_2}{k\,q\,\phi_{12} - (k-1)\,\phi_1 \phi_2}$$

(٣ ـ ٤) دالة إنتاج كوب ـ دوجلاس

تأخذ هذه الدالة الصيغة:

$$q = A\,L^{\alpha} K^{\beta}$$

حيث:

q = الكمية المنتجة

A = ثابت يعبِّر عن دور التقنية

L = وحدات عنصر العمل
K = وحدات عنصر رأس المال
α = ثابت يمثِّل مرونة الإنتاج بالنسبة للعمل
β = ثابت يمثِّل مرونة الإنتاج بالنسبة لرأس المال

وحيث :

$$q > 0, A > 0, L > 0, K > 0$$
$$0 < \alpha < 1$$
$$0 < \beta < 1$$

وتحمل هذه الدالة الخصائص الآتية [Heathfied, 1971 and Menderhausen, 1938]:

(١) هي دالة متجانسة من درجة $\alpha + \beta$ ؛ فإذا تغيّرت عناصر الإنتاج بنسبة ثابتة λ فإن ذلك سوف يؤدِّي إلى زيادة في الإنتاج قدرها :

$$A(\lambda L)^{\alpha}(\lambda K)^{\beta} = \lambda^{\alpha+\beta} AL^{\alpha}K^{\beta}$$
$$= \lambda^{\alpha+\beta} q$$

فإذا كانت $\alpha + \beta = 1$ فإن دالـة كوب ـ دوجلاس تكون متجانسة من الدرجة الأولى ، ويمكن كتابتها كالآتي :

$$q = AL^{\alpha}K^{1-\alpha}$$

وبناءً على ذلك فإنه :

(i) إذا كانت $\alpha + \beta = 1$ تكون غلة الإنتاج ثابتة .
(ii) إذا كانت $(\alpha + \beta) > 1$ يخضع الإنتاج لتزايد الغلة .
(iii) إذا كانت $(\alpha + \beta) < 1$ كانت الغلة متناقصة .

(٢) طبقًا لدالة إنتاج كوب ـ دوجلاس تكون الإنتاجية الحدِّية لكل عنصر موجبة ولكن تخضع لقانون تناقص الغلة :

فبالنسبة لعنصر العمل

$$Mp_L = \frac{\partial q}{\partial L} = \frac{\alpha q}{L} > 0$$

$$\frac{\partial \ (Mp_L)}{\partial L} = \frac{\partial^2 q}{\partial L^2} = \frac{\alpha \ (\alpha - 1) \ q}{L^2} \ < \ 0$$

وبالنسبة لعنصر رأس المال

$$Mp_k = \frac{\partial q}{\partial k} = \frac{\beta q}{k} \ > \ 0$$

$$\frac{\partial \ Mp_k}{\partial k} = \frac{\partial^2 q}{\partial k^2} = \frac{\beta \ (\beta - 1) \ q}{k^2} \ < \ 0$$

(٣) تتزايد الإنتاجية الحدِّية لكل عنصر نتيجة زيادة العنصر الآخر المشترك معه في العملية الإنتاجية أو:

$$\frac{\partial \ (Mp_k)}{\partial L} \ = \ \frac{\alpha \ \beta \ q}{Lk} \ > \ 0$$

$$\frac{\partial \ (Mp_L)}{\partial k} \ = \ \frac{\alpha \ \beta \ q}{Lk} \ > \ 0$$

(٤) يكون معدَّل الإحلال الحدِّي طبقًا لدالة إنتاج كوب ـ دوجلاس سالبًا ويتوقف على النسبة التي تستخدم بها عناصر الإنتاج ومرونة الإنتاج بالنسبة لكل منها:

$$r = \frac{dk}{dL} = - \frac{Mp_L}{Mp_k} = - \frac{\alpha}{\beta} \ \ \frac{K}{L} \ < \ 0$$

(٥) تكون مرونة الإنتاج بالنسبة لكل عنصر ثابتة:

$$\eta_{q,L} = \frac{\partial q}{\partial L} \frac{L}{q} = \alpha$$

$$\eta_{q,k} = \frac{\partial q}{\partial k} \frac{k}{q} = \beta$$

(٦) مرونة إحلال دالة إنتاج كوب ـ دوجلاس تساوي واحدًا صحيحًا.

ويمكن اشتقاق هذه المرونة كالآتي:

$$\sigma = \frac{d\left(\frac{k}{L}\right)}{\left(\frac{k}{L}\right)} \cdot \frac{\left(\frac{dk}{dL}\right)}{d\left(\frac{dk}{dL}\right)}$$

$$\sigma = \frac{\frac{dk}{dL}}{\left(\frac{k}{L}\right)} \div \frac{d\left(\frac{dk}{dL}\right)}{d\left(\frac{k}{L}\right)}$$

لكننا نحصل من دالة كوب ـ دوجلاس على:

$$\frac{dk}{dL} = \frac{-\alpha}{\beta} \quad \frac{k}{L}$$

$$\frac{\frac{dk}{dL}}{\left(\frac{k}{L}\right)} = \frac{-\alpha}{\beta}$$

$$\frac{d\left(\frac{dk}{dL}\right)}{d\left(\frac{k}{L}\right)} = \frac{-\alpha}{\beta}$$

وبالتعويض في معادلة مرونة الإحلال نحصل على:

$$\sigma = \frac{-\alpha}{\beta} \div \frac{-\alpha}{\beta} = 1$$

أي أنَّه طبقًا لدالة إنتاج كوب ـ دوجلاس، إذا تغيَّرت الأسعار النسبية لعناصر الإنتاج بمقدار واحد بالمائة، فإنه سوف يتبع ذلك تغيّر في الاستخدام النسبي لهذه العناصر بمقدار واحد بالمائة أيضًا [Cobb, 1928 and Sato, 1975].

(٣ ـ ٥) دالة الإنتاج ذات مرونة الإحلال الثابتة (C. E. S)

تأخذ هذه الدالة الصيغة:

$$q = \gamma \left[\lambda K^{-\varrho} + (1-\lambda) L^{-\varrho} \right]^{-\frac{1}{\varrho}}$$

حيث:

q = كمية الإنتاج

K = وحدات رأس المال

L = وحدات العمل

γ = ثابت يمثّل الكفاءة أو دور التقنية

λ = ثابت يمثّل توزيع الدخل بين العناصر

ϱ = ثابت يمثّل مرونة الإحلال

وحيث:

$$q > 0, L > 0, K > 0, K > 0, \gamma > 0$$

$$0 < \lambda < 1$$

$$\varrho > -1$$

وقد سمّيت هذه الدالة ذات مرونة الإحلال الثابتة؛ لأنها تعطي مرونة إحلال ثابتة (ϱ) ولكنها لا تساوي بالضرورة واحدًا صحيحًا كما هو الحال في دالة إنتاج كوب ـ دوجلاس.

وقد قام بتأليف دالة إنتاج C. E. S أربعة اقتصاديون هم: Solow, Minhas, Arrow, Chenery ؛ ولذلك يطلق عليها أحيانًا دالة إنتاج S. M. A. C نسبةً لمؤلفيها.

وتحمل دالة إنتاج C. E. S الخصائص الآتية :

(١) تعتبر هذه الدالة متجانسة من الدرجة الأولى، فلو افترضنا زيادة كل عنصر من عناصر الإنتاج بنسبة ثابتة α نحصل على :

$$\gamma\left[\lambda(\alpha k)^{-\varrho}+(1-\lambda)(\alpha L)^{-\varrho}\right]^{-\frac{1}{\varrho}}$$

$$=\left(\alpha^{-\varrho}\right)^{-\frac{1}{\varrho}}\quad q$$

$$=\alpha q$$

وهكذا فإن هذه الدالة تحقق غلة حجم ثابتة :

أي يمكن أن تصاغ الدالة بحيث تكون متجانسة من درجة k كالآتي

$$q=\gamma\left[\lambda K^{-\varrho}+(1-\lambda)L^{-\varrho}\right]^{-k/\varrho}$$

(٢) تحقّق هذه الدالة إنتاجية حدِّية موجبة لكل عنصر من عناصر الإنتاج.

فبالنسبة لعنصر العمل نحصل على

$$Mp_L=\frac{\partial q}{\partial L}=\left[-\gamma\frac{1}{\varrho}\left\{\lambda K^{-\varrho}+(1-\lambda)L^{-\varrho}\right\}^{-\frac{1}{\varrho}-1}\right].$$

$$.\left[(1-\lambda)(-\varrho)L^{-\varrho-1}\right]$$

$$=\gamma(1-\lambda)L^{-\varrho-1}\left[\lambda K^{-\varrho}+(1-\lambda)L^{-\varrho}\right]^{-\frac{1}{\varrho}-1}$$

$$=(1-\lambda)\gamma^{-\varrho}\left(\frac{q}{L}\right)^{1+\varrho}\quad>\ 0$$

وبالنسبة لعنصر رأس المال نحصل على

$$Mp_K=\frac{\partial q}{\partial K}=\lambda\gamma^{-\varrho}\left(\frac{q}{K}\right)^{1+\varrho}\quad>\ 0$$

(٣) تتناقص الإنتاجية الحدِّية لكل عنصر مع زيادة الوحدات المستخدمة من هذا العنصر وثبات عدد الوحدات المستخدمة من العنصر المرافق؛ أي أن إنتاجية كل عنصر تخضع لقانون تناقص الغلة.

فبالنسبة لعنصر العمل نحصل على

$$\frac{\partial}{\partial L}(Mp_L) = \frac{\partial^2 q}{\partial L^2} = \left[(1-\lambda)\,\gamma^{-\varrho}\,(1+\varrho)\left(\frac{q}{L}\right)^{\varrho} \right].$$

$$\left[\frac{\frac{\partial q}{\partial L}L - q}{L^2}\right]$$

وبالنسبة لعنصر رأس المال نحصل على

$$\frac{\partial}{\partial k}(Mp_K) = \frac{\partial^2 q}{\partial K^2} = \left[\lambda\,\gamma^{-\varrho}\,(1+\varrho)\left(\frac{q}{K}\right)^{\varrho} \right].$$

$$\left[\frac{\frac{\partial q}{\partial k}K - q}{K^2}\right]$$

لكن من معطيات دالة إنتاج C. E. S:

$$\gamma > 0, L > 0, K > 0, \lambda > 0$$

$$(1-\lambda) > 0, \varrho > -1$$

وهكذا نحصل على

$$\frac{\partial^2 q}{\partial L^2} < 0$$

إذا كانت:

$$\frac{\partial q}{\partial L}L - q < 0$$

ونحصل على

$$\frac{\partial^2 q}{\partial K^2} < 0$$

إذا كانت :

$$\frac{\partial q}{\partial K} K - q < 0$$

ولما كانت دالة إنتاج C. E. S متجانسة من الدرجة الأولى فإن نظرية أويلر تنطبق عليها ؛ ومن ثم :

$$q = \frac{\partial q}{\partial L} L + \frac{\partial q}{\partial K} K$$

أي أن :

$$q - \frac{\partial q}{\partial L} L = \frac{\partial q}{\partial K} K > 0$$

وكذلك :

$$q - \frac{\partial q}{\partial K} K = \frac{\partial q}{\partial L} L > 0$$

ومن ثم :

$$\frac{\partial q}{\partial L} L - q < 0$$

وكذلك :

$$\frac{\partial q}{\partial K} K - q < 0$$

ويتبع ذلك أن :

$$\frac{\partial^2 q}{\partial L^2} < 0$$

وكذلك :

$$\frac{\partial^2 q}{\partial K^2} < 0$$

وهكذا فإن الإنتاجية الحدِّية لكل عنصر تخضع طبقًا لدالة إنتاج C. E. S لقانون تناقص الغلة [Currie, 1981].

(٤) تتزايد الإنتاجية الحدِّية للعنصر المعيَّن إذا ما زادت الكمية المستخدمة من العنصر المرافق؛ أي أن

$$\frac{\partial}{\partial K} Mp_L = \frac{\partial}{\partial L} Mp_K = \frac{\partial^2 q}{\partial L \partial K} = \frac{\partial^2 q}{\partial K \partial L}$$

$$= \lambda\,(1+\varrho)\,(1-\lambda)\,\gamma^{-2\varrho}\,q^{1+2\varrho}\,(LK)^{-(1+\varrho)}$$

وهي كمية موجبة.

(٥) معدَّل الإحلال الحدِّي الفنيِّ (r) لدالة إنتاج C. E. S سالب، ويتضح ذلك من الآتي :

$$r = \frac{dK}{dL} = -\frac{Mp_L}{Mp_K}$$

$$r = -\frac{(1-\lambda)\,\gamma^{-\varrho}\left(\frac{q}{L}\right)^{1+\varrho}}{\lambda\,\gamma^{-\varrho}\left(\frac{q}{K}\right)^{1+\varrho}}.$$

$$r = -\frac{1-\lambda}{\lambda}\left(\frac{K}{L}\right)^{1+\varrho}$$

(٦) مرونة إحلال دالة إنتاج C. E. S ثابتة وتساوي :

$$\sigma = \frac{1}{1+\varrho}$$

حيث $\varrho > -1$.

ويمكن إثبات ذلك كالآتي :
حيث إن دالة إنتاج C. E. S متجانسة من الدرجة الأولى فإنه يمكن أن نطبِّق بشأنها معادلة مرونة الإحلال :

$$\sigma = \frac{\frac{\partial q}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial q}{\partial x_2}}{q \frac{\partial^2 q}{\partial x_1 \partial x_2}}$$

بالتعويض :

$$\frac{\partial q}{\partial K} = \lambda \gamma^{-\varrho} \left(\frac{q}{K} \right)^{1+\varrho}$$

$$\frac{\partial q}{\partial L} = (1-\lambda) \gamma^{-\varrho} \left(\frac{q}{L} \right)^{1+\varrho}$$

$$\frac{\partial^2 q}{\partial L \partial K} = \lambda (1-\lambda) (1+p) \gamma^{-2\varrho} q^{1+2\varrho} (LK)^{-(1+\varrho)}$$

وبالتعويض من هذه المعادلات في معادلة مرونة الإحلال نحصل على :

$$\sigma = \frac{\lambda \gamma^{-\varrho} \left(\frac{q}{k} \right)^{1+\varrho} (1-\lambda) \gamma^{-\varrho} \left(\frac{q}{L} \right)^{1+\varrho}}{\lambda (1-\lambda) (1+\varrho) \gamma^{-2\varrho} q^{1+2\varrho} (Lk)^{-1(1+\varrho)} q}$$

$$\sigma = \frac{1}{1+\varrho}$$

وتوضِّح هذه النتيجة أن مرونة إحلال دالة إنتاج C. E. S ثابتة ولكنها لا تساوي بالضرورة واحدًا صحيحًا [Minford, 1983].

(٣ ـ ٥ ـ ١) علاقة الدالة C. E. S بدالة إنتاج كوب دوجلاس

يمكن إثبات أن دالة الإنتاج ذات المرونة الثابتة (أي دالة إنتاج C . E . S) والتي تأخذ الصورة :

$$q = \gamma \left[\lambda K^{-\varrho} + (1-\lambda) L^{-\varrho} \right]^{-\frac{1}{\varrho}}$$

تقترب من دالة إنتاج كوب دوجلاس التي تأخذ الصورة :

$$q = \gamma K^{\lambda} L^{(1-\lambda)}$$

كلما اقتربت مرونة الإحلال σ من واحد صحيح ؛ أي كلما اقتربت ϱ من مرونة دالة C. E. S من صفر .

فمن دالة إنتاج C. E. S نحصل على :

$$\left[\frac{q}{\gamma} \right] = \left[\lambda K^{-\varrho} + (1-\lambda) L^{-\varrho} \right]^{-\frac{1}{\varrho}}$$

$$\left(\frac{q}{\gamma} \right)^{-\varrho} = \lambda K^{-\varrho} + (1-\lambda) L^{-\varrho}$$

$$e^{\left(\frac{q}{\gamma}\right)^{-\varrho}} = e^{\lambda K^{-\varrho} + (1-\lambda) L^{-\varrho}}$$
$$= e^{\lambda K^{-\varrho}} \; . \; e^{(1-\lambda) L^{-\varrho}}$$

وبأخذ لوغاريتم الطرفين نحصل على :

$$\log \; e^{\left(\frac{q}{\gamma}\right)^{-\varrho}} = \log e^{\lambda K^{-\varrho}} + \log e^{(1-\lambda) L^{-\varrho}}$$

وحيث إن :

$$\log e^{q} = q = e^{\log q}$$

يمكن كتابة المعادلة الأخيرة كالآتي :

$$e^{\log\left(\frac{q}{\gamma}\right)^{-\varrho}} = e^{\log \lambda K^{-\varrho}} + e^{\log(1-\lambda) L^{-\varrho}}$$

$$e^{-\varrho \log \frac{q}{\gamma}} = e^{\log \lambda + \log K^{-\varrho}}$$

$$+ e^{\log(1-\lambda) + \log L^{-\varrho}}$$

$$= e^{\log \lambda} e^{\log K^{-\varrho}} + e^{\log(1-\lambda)} e^{\log L^{-\varrho}}$$

$$= \lambda e^{-\varrho \log K} + (1-\lambda) e^{-\varrho \log L}$$

وباستخدام مسلسلة مكلورينز (Mc Claurins)

$$e^{q} = 1 + q + \frac{q^2}{2!} + \frac{q^3}{3!} + \ldots + \frac{q^n}{N!}$$

وبناءً على ذلك :

$1 - \varrho \log \frac{q}{\gamma} +$ أسس أعلى من ϱ

$= \lambda(1 - \varrho \log K) + (1-\lambda)(1 - \varrho \log L)$

$+$ أسس أعلى من ϱ

$1 - \varrho \log \frac{q}{\gamma} +$ أسس أعلى من σ

$= \lambda - \lambda \varrho \log K$

$+ 1 - \lambda - (1-\lambda) \varrho \log K$

$+$ أسس أعلى من σ

فإذا قسمنا على ϱ وأخذنا النهاية $\varrho \to 0$ نحصل على :

$$-\log \frac{q}{\gamma} = -\lambda \log K - (1-\lambda) \log L$$

عندما $0 \rightarrow \varrho$ أي عندما $1 \rightarrow \sigma$:

نحصل على :

$$-\log \frac{q}{\gamma} = -\lambda \log K - (1-\lambda) \log L$$

$$\log \frac{q}{\gamma} + \log K^{\lambda} + \log L^{(1-\varrho)}$$

$$\frac{q}{\gamma} = K^{\lambda} L^{1-\lambda}$$

وبناءً على ذلك فإن

$$q = \gamma K^{\lambda} L^{1-\lambda}$$

(٣ ـ ٥ ـ ٢) التقدير القياسي لدالة C. E. S

يتضح أن دالة إنتاج C. E. S

$$q = \gamma \left[\lambda K^{-\varrho} + (1-\lambda) L^{-\varrho} \right]^{-\frac{1}{\varrho}}$$

لا يمكن تقدير معاملاتها $(\gamma, \lambda, \varrho)$ مباشرةً، أو عن طريق تحويلة لوغاريتمية أو غيرها. إلا أنه يمكن تقدير هذه المعاملات على مراحل كالآتي :

تقدير ϱ

بأخذ معامل التفاضل الجزئي للدالة بالنسبة لعنصر العمل L نحصل على :

$$-\frac{\partial q}{\partial L} \varrho q^{-(1+\varrho)} = -\gamma^{-\varrho} \varrho (1-\lambda) L^{-(1+\varrho)}$$

ومن ثم فإن :

$$\frac{\partial q}{\partial L} = \gamma^{-\varrho} (1-\lambda) \left(\frac{L}{q} \right)^{-(1+\varrho)}$$

ولكن عند التوازن يتساوى الأجر مع الإنتاجية الحدِّية للعمل. وهكذا فإن :

$$W = \gamma^{-\varrho} (1-\lambda) \left(\frac{q}{L} \right)^{1+\varrho}$$

ويمكن تحويل المعادلة الأخيرة إلى معادلة خطية كالآتي :

$$\log W = -\varrho \log \gamma + \log(1-\lambda) + (1+\varrho) \log \left(\frac{q}{L} \right)$$

ومن هذه المعادلة نحصل على تقديرات للكميات :

$(1+\varrho)$ و $(-\varrho \log \gamma + \log(1-\lambda))$

ومن الكمية الأخيرة نحصل على قيمة ϱ.

تقدير λ

لتقدير λ نقوم بأخذ التفاضل الجزئي للدالة بالنسبة للمتغيّر K فنحصل على

$$\frac{\partial q}{\partial K} = I = \gamma^{-\varrho} \lambda \left(\frac{K}{q} \right)^{-1(1+\varrho)}$$

لكن :

$$W = \gamma^{-\varrho} (1-\lambda) \left(\frac{q}{L} \right)^{1+\varrho}$$

ومن ثم نحصل على :

$$\frac{W}{I} = \frac{1-\lambda}{\lambda} \left(\frac{K}{L} \right)^{1+\varrho}$$

وحيث إننا نعرف قيم ϱ ، $(\frac{W}{I})$، $(\frac{K}{L})$ فإنه يمكننا حساب قيمة $\frac{1-\lambda}{\lambda}$ باستخدام التحليل الانحداري العادي، ومن هذا المقدار نستطيع حساب λ ؛ فإذا كانت الكمية $\frac{1-\lambda}{\lambda}$ تساوي 4 فإن λ تساوي $\frac{1}{5}$.

تقدير γ

حيث إننا قدرنا قيم ϱ ، λ ، وحيث إننا نعلم قيم q, K, L ، فإنه يمكن تقدير قيمة γ من الانحدار مباشرةً من الدالة

$$q = \gamma \left[\lambda K^{-\varrho} + (1-\lambda) L^{-\varrho} \right]^{-\frac{1}{\varrho}}$$

وبذلك نكون قدَّرنا معاملات دالة C. E. S كافةً وهي γ ، λ ، ϱ [Nelson, 1964].

(٣ ـ ٦) دالة الترويج التسويقي

قام بتأليف هذه الدالة مؤلف الكتاب وقد نشرت في المجلة العالمية [Metwally, 1974] والتي تصدر في نيويورك بالولايات المتحدة الأمريكية باسم *A Marketing Promotion Function* (M. P. F) وقد كان الهدف الأصلي من تأليف هذه الدالة معرفة تأثير استراتيجيات التسويق على حجم مبيعات المنشأة.

تستطيع المنشأة أن تزيد من حجم مبيعاتها وأن تزيد نصيبها من السوق باستخدام استراتيجيات مختلفة، منها تخفيض السعر، وزيادة الإنفاق على الإعلان، وتحسين صفات السلعة المباعة. . . إلخ . وفي حالة غياب المنافسة السعرية تعتمد المنشأة على استراتيجيات أخرى غير تغيّر السعر ولا سيما سياسة الإعلان وتحسين صفات السلعة [Koytsoyiannis, 1982].

إلا أن أي سوق استهلاكي يتصف بوجود عدد من المستهلكين للسلعة يتمسك بصنف معينً دون غيره ، ويمكن أن نطلق عليهم المستهلكين المتمسكين ، وسبب وجود هذا العـدد هو نجاح المنشآت في الماضي باستخدام أسلوب الإعلان واستراتيجيات التسويق الأخرى في إقناع هؤلاء المستهلكين بأن صنفهم يختلف عن باقي الأصناف، مما أدى إلى انخفاض مرونة الطلب عند هؤلاء المستهلكين .

ومعنى ما تقـدم أن استخدام استراتيجيات التسويق المختلفة لزيادة المبيعات سوف يتركز على المستهلكين غير الملتزمين أو المتمسكين .

وهكذا تصبح دالة الترويج التسويقي كالآتي :

$$Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

حيث

Z = المبيعات للمستهلكين غير المتمسكين

x_i = الإنفاق على استراتيجية التسويق المعيَّنة .

فلو افترضنا عنصرين فقط من عناصر الترويج :

x = الإنفاق على الإعلان

y = الإنفاق على تحسين صفات السلعة

فإن دالة الترويج تصبح كالآتي :

$$Z = \phi(x, y)$$

وتتميز هذه الدالة بالصفات الآتية :

(i) إذا كانت $x = y = 0$. فإن $Z = 0$

(ii) إذا كانت $x = 0$ ، $0 < y < \infty$ فإن $Z > 0$.

(iii) إذا كانت $y = 0$ ، $0 < x < \infty$ فإن $Z > 0$.

(iv) عندما $x \to \infty$ ، $0 \leqslant y \leqslant \infty$ فإن $Z \to$ ثابت.

(v) عندما $y \to \infty$ ، $0 \leqslant x \leqslant \infty$ فإن $Z \to$ ثابت.

$$\frac{\partial \phi (x,y)}{\partial x} > 0 \qquad \text{(vi)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\partial \phi (x,y)}{\partial x} = \infty$$

$$\lim_{x\to \infty} \frac{\partial \phi (x,y)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \phi (x,y)}{\partial y} > 0 \qquad \text{(vii)}$$

$$\lim_{y\to 0} \frac{\partial \phi (x,y)}{\partial y} = \infty$$

$$\lim_{y\to \infty} \frac{\partial \phi (x,y)}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \phi (x,y)}{\partial x^2} < 0 \qquad \text{(viii)}$$

$$\frac{\partial^2 \phi (x,y)}{\partial y^2} < 0 \qquad \text{(ix)}$$

$$\frac{\partial^2 \phi (x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \phi (x,y)}{\partial y \partial x} < 0 \qquad \text{(x)}$$

وتوضِّح الخاصية (i) أن المنشأة لن تنجح في اجتذاب أو إبقاء المستهلكين غير المتمسكين إذا لم تقم بترويج مبيعاتها.

وتوضِّح الخاصية (ii) والخاصية (iii) أن عناصر إنتاج دالة الترويج مستقلة من الناحية الفنية؛ بمعنى أن الإنتاج (في هذه الحالة زيادة المبيعات) يتحقق حتى ولو كانت الكمية المستخدمة من أحد العناصر تساوي صفرًا؛ وبهذا تختلف دالة الترويج عن دوال الإنتاج التقليدية.

أما الخاصتان الرابعة والخامسة فتوضحان أن الإنتاج (في هذه الحالة المبيعات للمستهلكين غير المتمسكين) له حد أقصى يمكن أن يتعداه (an asymptotic level) ، وبناء على ذلك لاتستطيع المنشأة أن تزيد من نصيبها في السوق بأكثر من قدر معيَّن مهما أنفقت على أساليب الترويج وهنا تختلف أيضًا دالة الترويج عن دوال الإنتاج العادية ، فدالة الترويج تصلح في تلك الحالات التي تكون فيها الكمية التي يمكن إنتاجها خلال فترة زمنية معيَّنـة (كالمبيعات للمستهلكين غير المتمسكين أو إنتاج آبار النفط محدودة الكمية . . . إلخ) كمية محدودة .

وتوضِّح الخصائص (viii) ، (ix) ، (x) أن عناصر الإنتاج تخضع لقانون تناقص الغلة ، كما توضِّح أن الإنتاجية الحدِّية لأي عنصر (أو أسلوب ترويجي) تتناقص إذا زادت الكمية المستخدمة من العنصر الآخر ، وفي هذا أيضًا اختلاف عن دوال الإنتاج التقليدية ، ويرجع هذا إلى افتراض أن للإنتاج حدًّا أقصى وأن عناصر الإنتاج مستقلة من الناحية الفنية .

هذا وقد قمنا بتأليف الدالة الصريحة الآتية التي تتمتع بالخصائص المذكورة أعلاه :

$$Z = A\, e^{\frac{-1}{x^{\alpha} + y^{\beta}}}$$

حيث z ، x ، y تعرف كما سبق ، مع افتراض أن كلًّا من x, y مقدار صحيح موجب . أما A فتمثِّل المبيعات للمستهلكين كافة غير المتمسكين بالسلعة ؛ أي أن A تمثِّل جملة مبيعات المنشآت كافة للمستهلكين غير المتمسكين . أما α, β فهي معاملات سلوكية بحيث :

$$0 < \alpha < 1; 0 < \beta < 1$$

ويتضح من الدالة أعلاه :

(i) إذا كانت $x = y = 0$ فإن $Z = 0$.

(ii) إذا كانت $x = 0$ ، $0 < y < \infty$ فإن:

$$Z = A\, e^{\frac{-1}{y^{\beta}}} > 0$$

(iii) إذا كانت $y = 0$ ، $0 < x < \infty$ فإن:

$$Z = A\, e^{\frac{-1}{x^{\alpha}}} > 0$$

(iv) عندما $x \to \infty$ ، $0 \leqslant y \leqslant \infty$ فإن $Z \to A$.

وهكذا فإن دالة الترويج تحقّق الخصائص (i) إلى (v) أعلاه.

ويمكن حساب الإنتاجية الحدِّية لكل عنصر كالآتي:

$$Mp_x = \phi_x = \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\alpha Z}{x^{1-\alpha}(x^{\alpha} + y^{\beta})^2} > 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\partial Z}{\partial x} = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\partial Z}{\partial x} = 0$$

$$Mp_y = \phi_y = \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\beta Z}{y^{1-\beta}(x^{\alpha} + y^{\beta})^2} > 0$$

$$\lim_{y \to 0} \frac{\partial Z}{\partial y} = \infty$$

$$\lim_{y \to \infty} \frac{\partial Z}{\partial y} = 0$$

ويمكن إثبات أن الإنتاجية الحدِّية لكل عنصر تتناقص كالآتي :

$$\phi_{xx} = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = \frac{\alpha(\alpha-1)Z}{x^{2-\alpha}(x^\alpha + y^\beta)^2} + \frac{\alpha^2 Z[1-2(x^\alpha + y^\beta)]}{x^{2(1-\alpha)}(x^\alpha + y^\beta)^4}$$

وهو مقدار سالب .

$$\phi_{yy} = \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = \frac{\beta(\beta-1)Z}{y^{2-\beta}(x^\alpha + y^\beta)^2} + \frac{\beta^2 Z[1-2(x^\alpha + y^\beta)]}{y^{2(1-\beta)}(x^\alpha + y^\beta)}$$

وهو مقدار سالب أيضًا .

ويمكن أيضًا حساب التغيّر في الإنتاجية الحدِّية لعنصر ما نتيجة تغيّر وحدات العنصر الآخر كالآتي :

$$\phi_{xy} = \phi_{yx} = \frac{\partial^2 Z}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 Z}{\partial y\, \partial x}$$

$$= \frac{\alpha\beta Z[1-2(x^\alpha + y^\beta)]}{x^{1-\alpha}y^{1-\beta}(x^\alpha + y^\beta)^4} < 0$$

ويمكن حساب معدَّل الإحلال الحدِّي بين العنصرين x ، y كالآتي :

$$r_{xy} = \frac{dx}{dy} = \frac{-\phi_y}{\phi_x} = \frac{-\beta x^{1-\alpha}}{\alpha y^{1-\beta}} < 0$$

كما يمكن حساب مرونة الإحلال σ كالآتي :

$$\sigma_{xy} = \frac{ry - x}{\frac{\partial r}{\partial x} r - \frac{\partial r}{\partial y}} \cdot \frac{r}{xy} = -\frac{\alpha x^\alpha + \beta y^\beta}{\alpha(\beta-1)x^\alpha + \beta(\alpha-1)y^\beta}$$

إذا كانت $\alpha = \beta$ ؛ أي إذا كانت الدالة تأخذ الصيغة :

$$Z = A\, e^{\frac{-1}{x^{\alpha} + y^{\alpha}}}$$

فإن مرونة الإحلال تصبح مساوية

$$\sigma_{xy}\,|_{\alpha = \beta} = \frac{1}{1-\alpha}$$

ومعنى هذا أن دالــة الـترويج ذات مرونـة إحـلال متغـيّرة (إذا كانت $\alpha \neq \beta$)، أو مرونـة ثابتـة (إذا كانت $\alpha = \beta$)، وهي في ذلك تختلف عن دوال الإنتاج التقليدية [Metwally, 1975].

ويمكن استخـدام هذه الـدالة في تحديد توازن المنشأة. فمشكلة المنشأة هي تعظيم المبيعات للمستهلكين غير المتمسكين، على أن يكون ذلك في حدود ميزانية معيَّنة تنفق على وسائل ترويج المبيعات المختلفة؛ أي أن مشكلة المنشأة هي تعظيم الدالة :

$$Z = A\, e^{\frac{-1}{x^{\alpha} + y^{\beta}}}$$

طبقًا للقيد (S. T.)

$$\psi\,(x, y) = M - x - y = 0$$

حيث M تمثِّل ميزانية المنشأة التي ترغب في إنفاقها على الإعلان (x) وتحسين صفات السلعة (y).

وباستخدام دالة لاجرانج نحصل على :

$$L = A\, e^{\frac{-1}{x^{\alpha} + y^{\beta}}} + \lambda\,(M - x - y)$$

الشروط الضرورية للتوازن :

$$L_x = \frac{\alpha Z}{x^{1-\alpha}(x^{\alpha} + y^{\beta})^2} - \lambda = 0$$

$$L_y = \frac{\beta Z}{y^{1-\beta}(x^{\alpha} + y^{\beta})^2} - \lambda = 0$$

$$L_{\lambda} = M - x - y = 0$$

ومن هذه الشروط نحصل على

$$\frac{\alpha}{x^{1-\alpha}} = \frac{\beta}{y^{1-\beta}}$$

الشرط الكافي للتوازن : يتحقق هذا الشرط إذا كانت محددة هيشيان المطوقة من الدرجة الثانية موجبة ، أو:

$$\bar{S}_2 = \begin{vmatrix} \phi_{xx} & \phi_{xy} & \psi_x \\ \phi_{xy} & \phi_{yy} & \psi_y \\ \psi_x & \psi_y & 0 \end{vmatrix}$$

وبالتعويض عن قيم ϕ_{xx} ، ϕ_{xy} ، ϕ_{yy} ، ϕ_{xy} المقدّرة سابقًا ، وكذلك قيم ψ_x ، ψ_y ، فإننا نحصل على :

$$\bar{S}_2 = \frac{-\alpha Z}{x^{1-\alpha}} \quad . \quad \frac{\frac{1}{x}(\alpha - 1) + \frac{1}{y}(\beta - 1)}{(x^{\alpha} + y^{\beta})^2} \quad > \quad 0$$

وهكذا فإن الشرط الكافي للتوازن يتحقق .

(٣ - ٧) تمرينات

١) احسب قيمة مرونة الإحلال لكل من دوال الإنتاج الآتية :

$$q = 5L^{0.25}K^{0.75}$$

$$q = 2L + 4K$$

$$q = L^2 + LK + K^2$$

$$q = e^{L+K}$$

$$q = \log_e(LK)$$

٢) إذا كانت دالة الإنتاج هي :

$$x = A \quad a^{\frac{1}{2}} \quad b^{\frac{1}{4}} \quad c^{\frac{1}{4}}$$

(i) أثبت أن :

$$x = \frac{\partial x}{\partial a} a + \frac{\partial x}{\partial b} b + \frac{\partial x}{\partial c} c$$

(ii) أثبت أنه إذا كانت :

$$\frac{\partial x}{\partial a} = \frac{\partial x}{\partial b} = \frac{\partial x}{\partial c}$$

فإن :

$$x = \frac{Aa}{\sqrt{2}}$$

٣) إذا كانت دالة الإنتاج تساوي :

$$Z = A\left[e^{-a/xy} + e^{-b/x} + e^{-c/y}\right]$$

أوجد قيمة :

$$\frac{\partial Z}{\partial x} \; ; \; \frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}$$

٤) إذا كانت دالة إنتاج منتج ما تساوي :

$$Q = 50L^{1/3}K^{2/3}$$

وبافتراض أن ثمن كل وحدة من العنصر L هي $p_L = 4$ ، وأن ثمن كل وحدة من العنصر K هي $p_K = 6$ ، وأن جملة التكاليف $C = 72$ ، احسب أقصى إنتاج ممكن أن يحققه المنتج باستخدام هذا القدر من التكاليف.

٥) إذا كانت دالة إنتاج منشأة ما تساوي :

$$q = 20\left[\frac{3}{4}L^{-\frac{1}{4}} + \frac{1}{4}K^{-\frac{1}{4}}\right]^{-4}$$

وإذا كان خط التكلفة يساوي :

$$4L + 3K = 80$$

(i) احسب كميات L ، K التي تحقق أقصى إنتاج ممكن.

(ii) احسب كميات L ، K اللازمة لإنتاج ١٢٠ وحدة بأقل تكاليف ممكنة.

٦) وضّح ما إذا كانت دوال الإنتاج الآتية تخضع لثبات الغلة، تناقص الغلة أم تزايد الغلة :

$$Q = 2L + 4K$$

$$Q = L^{0.5}K^{0.5}$$

$$Q = 2L^{\frac{1}{2}}K^{\frac{1}{3}}$$

$$Q = 4L^{0.75}K^{0.5}$$

$$Q = 0.2(L^{0.5} + K^{0.25})$$

$$Q = 2L^2 + L.K + K^2$$

$$Q = 20\left[\frac{1}{4}L^{-0.25} + \frac{3}{4}K^{-0.25}\right]^{-4}$$

٧) وضِّح بالنسبة لكل من دوال الإنتاج الآتية ما إذا كانت الدالة متجانسة، وحدِّد درجة التجانس، ثم أثبت نظرية أويلر بالنسبة لكل دالة متجانسة :

$$Z = 3x^3 + 5xy^2 + y^3$$

$$Z = \frac{14}{x} - \frac{20}{y}$$

$$Z = 25y^6 - x^2y^4$$

$$Z = \frac{3}{x^2} + \frac{25}{xy} + \frac{6}{y^2}$$

الفصل الرابع

نظرية التكاليف

(٤ ـ ١) دالة التكاليف

تعرّف العلاقة بين تكلفة الإنتاج ومستوى الإنتاج بدالة التكاليف ويمكن التعبير عنها كالآتي :

$$C = f(q)$$

حيث C = التكلفة الكلية

q = مستوى الإنتاج

ويمكن استنتاج التعاريف الآتية :

متوسط التكاليف المتغيّرة (average variable cost) (AVC) = $\dfrac{\text{جملة التكاليف المتغيّرة}}{\text{عدد الوحدات المنتجة}}$

متوسط التكاليف الثابتة (average fixed cost) (AFC) = $\dfrac{\text{جملة التكاليف الثابتة}}{\text{عدد وحدات الإنتاج}}$

متوسط التكاليف الكلية (average total cost) (ATC) = $\dfrac{\text{جملة التكاليف}}{\text{عدد وحدات الإنتاج}}$

التكليفة الحدِّية (marginal cost) (MC) = $\dfrac{dC}{dq}$

تتناقص التكلفة الحدِّية إذا كان:

$$\frac{d^2C}{dq^2} < 0$$

تتزايد التكلفة الحدِّية إذا كان:

$$\frac{d^2C}{dq^2} > 0$$

وتبقى التكلفة الحدِّية ثابتة إذا كان:

$$\frac{d^2C}{dq^2} = 0$$

مثال

نفترض دالة التكاليف الآتية:

$$C = aq^3 - bq^2 + gq + F$$

ففي هذه الحالة نجد أن:

التكلفة الثابتة الكلية = F

التكلفة المتغيرة الكلية = $aq^3 - bq^2 + gq$

متوسط التكاليف الثابتة = $\frac{F}{q}$

متوسط التكاليف المتغيِّرة = $aq^2 - bq + g$

متوسط التكاليف الكلية = $aq^2 - bq + g + \frac{F}{q}$

وبناءً على ذلك فإن:

متوسط التكاليف = متوسط التكاليف الكلية - متوسط التكاليف الثابتة

$$AVC = ATC - AFC$$

التكلفة الحدِّية :

$$MC = \frac{dC}{dq} = 3aq^2 - 2bq + g$$

ويلاحظ أن التكلفة الحدِّية تساوي التكلفة (الكلية) المتوسطة عندما يكون هذا الأخير عند نهايته الصغرى، كما سوف يتضح فيما بعد. ففي مثالنا الحالي نحصل على :

$$ATC = \frac{aq^3 - bq^2 + g\,q + F}{q}$$

عندما يكون (ATC) عند نهايته الصغرى نحصل على :

$$\frac{d(ATC)}{dq} = \frac{[3aq^2 - 2bq + g]\,q - C}{q^2} = 0$$

$$= [3aq^2 - 2bq + g]\,q = C$$

أي أنه عندما يكون متوسط التكاليف عند نهايته الصغرى نحصل على :

$$3aq^2 - 2bq + g = \frac{C}{q}$$

أي أن :

$$MC = (ATC)_{min}$$

ويمكن تحديد ما إذا كانت التكلفة الحدِّية في مثالنا هذا تتناقص أو تتزايد أو تبقى ثابتة مع زيادة الإنتاج :

$$MC = 3aq^2 - 2bq + g$$

$$\frac{d(MC)}{dq} = 6aq - 2b$$

ويتضح أن :

$$\frac{d\,(MC)}{dq} = 0$$

إذا كانت

$$q = \frac{2b}{6a}$$

وتكون

$$\frac{d\,(MC)}{dq} > 0$$

إذا كانت

$$q > \frac{2b}{6a}$$

وتكون

$$\frac{d}{dq}(MC) < 0$$

إذا كانت

$$q < \frac{2b}{6a}$$

وبـذلـك فإن التكلفـة الحـدِّية تتناقص عند مستويات الإنتاج أقل من $\frac{2b}{6a}$ وتتزايد عند المستويات التي تفوق $\frac{2b}{6a}$.

(٤ ـ ٢) العلاقة بين التكلفة المتوسطة والتكلفـة الحديـة

يفيد التحليل الرياضي للتغيّر الحدِّي في إيجاد علاقات اقتصادية مهمة، مثل العلاقة بين التكلفة المتوسطة والتكلفة الحدِّية.

لو افترضنا أن دالة التكاليف هي :

$$y = f(x)$$

حيث تمثل y تكلفة الإنتاج، وتمثِّل x الكمية المنتجة فإن الدالة أعلاه تعطي التكاليف المتوسطة والتكاليف الحدِّية الآتية:

$$AC = \frac{y}{x}$$

$$MC = \frac{dy}{dx}$$

ويمكن استنتاج علاقة مهمة بين التكلفة المتوسطة (AC) والتكلفة الحدِّية (MC)، وذلك بإيجاد قيمة التكلفة المتوسطة عند نهايتها الصغرى.

ومن المعروف أن الشرط الضروري لتحقيق نهاية صغرى لدالة في متغيّر واحد هو أن يكون معامل التفاضل الأول لهذه الدالة مساويًا صفرًا؛ أي أنه عندما تكون التكلفة المتوسطة عند نهايتها الصغرى نحصل على:

$$\frac{d\,(AC)}{dx} = 0$$

أو:

$$d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x\dfrac{dy}{dx} - y}{x^2} = 0$$

ومن هذه المعادلة نحصل على:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

وبالتعويض في معادلة التكلفة الحدِّية ومعادلة التكلفة المتوسطة في العلاقة الأخيرة نحصل على:

$$MC = (AC)_{min}$$

أي أن التكلفة الحدِّية تساوي التكلفة المتوسطة، عندما تكون الأخيرة عند نهايتها الصغرى.

وتجدر الإشارة هنا إلى أن تحقيق نهاية صغرى (أو عظمى) لدالة ما يتطلب توافر الشرطين : الضروري والكافي . والشرط الكافي في حالتنا هذه يتطلب :

$$\frac{d^2 (AC)}{dx^2} > 0$$

(٤ ـ ٣) العلاقة بين التكلفة الحدِّية والإنتاجية الحدِّية

يمكننا استخدام الأسلوب الرياضي في إثبات علاقة مهمة، وهي أن تناقص الغلة الحدِّية شرط ضروري وكاف لتحقيق تزايد التكلفة الحدِّية، وذلك في حالة دالة الإنتاج في متغيّر واحد .

لنفترض دالة الإنتاج الآتية :

$$q = \phi (L)$$

حيث تكون q الكمية المنتجة وL كمية العمل المستخدمة في الإنتاج . فلو افترضنا أن تكلفة وحدة العمل تساوي ω فإن جملة التكاليف تساوي

$$C = \omega L$$

ويمكن استنتاج التكلفة الحدِّية كالآتي :

$$MC = \frac{dC}{dq} = L \frac{d\omega}{dq} + \omega \frac{dL}{dq}$$

فلو كانت تكلفة وحدة العمل (ω) ثابتة حصلنا من المعادلة الأخيرة على :

$$\frac{dC}{dq} = \omega \frac{dL}{dq}$$

ويمكن استنتاج الإنتاجية الحدِّية للعمل من دالة الإنتاج أعلاه كالآتي :

$$Mp_L = \frac{dq}{dL} = \phi' (L)$$

ومن هذه المعادلة نحصل على :

$$\frac{dL}{dq} = \frac{1}{\phi'(L)}$$

وبالتعويض من معادلة التكلفة الحدِّية نحصل على :

$$\frac{dC}{dq} = \frac{\omega}{\phi'(L)}$$

لكن من المعادلة

$$C = \omega L$$

يمكن أن نحصل على التكلفة الحدِّية لعنصر العمل كالآتي :

$$MC_L = \frac{dC}{dL} = \omega$$

وبالتعويض من هذه المعادلة في معادلة تكلفة الإنتاج نحصل على :

$$\frac{dC}{dq} = \frac{dC}{dL} / \phi'(L)$$

$$\frac{dC}{dq} = \frac{dC}{dL} / \frac{dq}{dL}$$

أي أن :

$$\text{التكلفة الحدِّية للإنتاج} = \frac{\text{التكلفة الحدِّية لعنصر الإنتاج المتغيّر}}{\text{الإنتاجية الحدِّية لعنصر الإنتاج المتغيّر}}$$

من المعادلة :

$$\frac{dC}{dq} = \frac{\omega}{\phi'(L)}$$

نحصل على (بتفاضل الطرفين بالنسبة للمتغيّر q)

$$\frac{d}{dq}\left(\frac{dC}{dq}\right) = \frac{d}{dq}\left(\frac{\omega}{\phi'(L)}\right)$$

$$\frac{d^2C}{dq^2} = \frac{\frac{d\omega}{dq}\phi'(L) - \frac{d}{dq}[\phi'(L)]\,\omega}{[\phi'(L)]^2}$$

$$= 0 - \frac{\frac{d}{dq}\;[\phi'(L)]\,\omega}{[\phi'(L)]^2}$$

إلا أن :

$$\frac{d}{dq}\;[\phi'(L)] = \frac{d}{dL}[\phi'(L)].\frac{dL}{dq}$$

$$= \phi''(L)\,.\,\frac{1}{\phi'(L)}$$

وذلك لأن الدالة $\phi'(L)$ دالة في المتغيّر L الذي بدوره دالة للمتغيّر q.

وبالتعويض من العلاقة الأخيرة في المعادلة $\frac{d^2C}{dq^2}$ نحصل على :

$$\frac{d^2C}{dq^2} = \frac{-\omega\,\phi''(L)}{\left[\phi'(L)\right]^3}$$

ويتضح من هذه المعادلة أن $\frac{d^2C}{dq^2}$ تكون موجبة، مما يدل على تزايد التكلفة الحدّية فقط عندما تكون $\phi''(L)$ سالبة. وذلك لأن كلاً من (ω) التي تمثّل قيمة وحدة العمل (أو الأجر اليومي)، وكذلك $\phi'(L)$ التي تمثّل الإنتاجية الحدِّية للعمل، لابد وأن تكون كميات موجبة.

وبناءً على ذلك فإن التكلفة الحدِّية تتزايد فقط، إذا ما تناقصت الإنتاجية الحدِّية لعنصر الإنتاج المتغيّر، ولما كانت دالة الإنتاج في الأجل القصير تابعة لعنصر العمل

المتغيّر فقط، حيث إن رأس المال والأرض يفترض فيهما الثبات في هذه الفترة القصيرة، فإن التكلفة الحدِّية في الأجل القصير تتزايد، إذا ما تحقق قانون تناقص الغلة بالنسبة للعنصر المتغيّر [Baumol, 1976 and Shephard, 1970].

(٤ ـ ٤) مرونة التكاليف وغلة الحجم

تعرّف مرونة تكاليف الإنتاج كالآتي:

$$k = \frac{\text{التغيّر النسبي في التكاليف الكلّية}}{\text{التغيّر النسبي في الإنتاج}}$$

$$k = \frac{dC}{dq} \cdot \frac{q}{C}$$

حيث تكون C جملة التكاليف؛ q وحدات الإنتاج ويرمز أحيانًا إلى k بمعامل التكاليف النسبية، كما يرمز إلى مقلوبه $\frac{1}{k}$ بمعامل الكفاءة النسبية للمنشأة.

ويمكن استخدام مرونة التكلفة الكلّية بالنسبة للإنتاج ومرونة التكلفة المتوسطة بالنسبة للإنتاج في توضيح العلاقة بين التكلفة الحدِّية والتكلفة المتوسطة، وتحديد ما إذا كانت تكلفة الحجم متناقصة أو متزايدة أو ثابتة.

إن مرونة التكاليف المتوسطة تعرف كالآتي:

$$k' = \frac{d}{dq}(AC) \cdot \frac{q}{AC}$$

$$= \frac{d}{dq}\left(\frac{C}{q}\right) \cdot \frac{q}{\left(\frac{C}{q}\right)}$$

$$= \frac{d}{dq}\left(\frac{C}{q}\right) \cdot \frac{q^2}{C}$$

$$k' = \frac{q^2}{C} \cdot \frac{q\left(\frac{dC}{dq}\right) - C\left(\frac{dq}{dq}\right)}{q^2}$$

$$= \frac{1}{C}\left[q\left(\frac{dC}{dq}\right) - C \right]$$

$$= \left(\frac{q}{C} \quad \frac{dC}{dq}\right) - 1$$

وهكذا فإن :

$$k' = k - 1$$

أي أنه إذا كانت $k < 1$ فإن مرونة التكاليف المتوسطة (k') سوف تكون سالبة ، وهذا يشير إلى وجود تكلفة متناقصة أي أن الزيادة في الإنتاج سوف تتحقق بزيادة نسبية أقل في التكاليف ، وعلى العكس من ذلك لو كانت $k > 1$. أما إذا كانت $k = 1$ فإن التكلفة تكون ثابتة ؛ أي أن الزيادة الطفيفة في الإنتاج سوف يتبعها زيادة في التكاليف بالنسبة نفسها ، وفي هذه الحالة $k' = 0$ ويكون لدينا :

$$\frac{q}{C} \quad \frac{dC}{dq} = 1$$

أي أن :

$$\frac{dC}{dq} = \frac{C}{q}$$

فالتكلفة الحدِّية تتساوى مع التكلفة المتوسطة وتكون الأخيرة ثابتة عند كل حجم إنتاج (ثبات التكلفة) .

(٤ ـ ٥) شروط تصغير تكلفة الإنتاج

لنفترض أن تكلفة الإنتاج الثابتة هي F ؛ ومن ثم فإن هذه التكاليف لن تتغيّر بتغيّر المنتجات أو عناصر الإنتاج، ولنفترض أن عناصر الإنتاج هي $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ، وأنه يمكن شراء أي كميات منها بالأسعار $p_1, p_2, \ldots, p_n$ فإننا نحصل على :

$$C = F + \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

حيث C تمثل جملة تكاليف الإنتاج.

ولنفترض أن دالة الإنتاج هي :

$$q = \phi (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

فتصبح مشكلتنا تحقيق أقل تكلفة ممكنة لإنتاج كمية ثابتة أو تصغير الدالة :

$$C = F + \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$

مع مراعاة أن :

$$\phi (x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bar{q}$$

أي أن المطلوب هو الحصول على أقل تكاليف ممكنة مع مراعاة قيد الإنتاج؛ أي الحصول على مقدار ثابت من الإنتاج.

وباستخدام دالة لاجرانج نحصل على :

$$L = F + \sum_{i=1}^{n} p_i x_i + \lambda \left[\bar{q} - \phi (x_1 , x_2 , \ldots, x_n) \right]$$

وتعطي الشروط الضرورية للتوازن :

$$L_i = \frac{\partial L}{\partial x_i} = p_i - \lambda \phi_i = 0$$

$$L_\lambda = \bar{q} - \phi (x_1 , x_2 , \ldots, x_n) = 0$$

حيث

$$\phi_i = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} ; \quad i = 1 ,\dots, n$$

ومن هذه الشروط نحصل على :

$$\frac{\phi_1}{p_1} = \frac{\phi_2}{p_2} = \dots = \frac{\phi_n}{p_n} = \frac{1}{\lambda}$$

وتـوضِّح هذه المعادلة الأخيرة أنه عندما تكون التكاليف عند نهايتها الصغرى، فإن الإنتاجية الحدِّية لآخر وحدة نقدية ($\frac{1}{\lambda}$) سوف تكون متساوية في كل وجه من أوجه الإنفاق.

ويمكن إثبات أن λ تمثِّل التكلفة الحدِّية؛ أي يمكن إثبات أن :

$$\lambda = \frac{dC}{dq}$$

وهكذا يتضح من معادلة التكاليف أن :

$$dC = \sum_{i=1}^{n} p_i \, dx_i + \sum_{i=1}^{n} x_i \, dp_i$$

كما يتِّضح من دالة الإنتاج أن :

$$dq = \sum_{i=1}^{n} \phi_i \, dx_i$$

وبقسمة المعادلتين نحصل (بافتراض ثبات الأسعار) على :

$$\frac{dC}{dq} = \frac{\sum p_i \, dx_i}{\sum \phi_i \, dx_i}$$

لكن من شرط التوازن أعلاه نحصل على:

$$p_i = \lambda\, \phi_i$$

وبالتعويض نحصل على:

$$\frac{dC}{dq} = \frac{\sum \lambda \phi_i\, dx_i}{\sum \phi_i\, dx_i} = \lambda$$

وهكذا فإنه عند التوازن نحصل على:

$$p_i = \frac{\partial C}{\partial q}\, \phi_i$$

وتشير هذه المعادلة الأخيرة إلى أنه عندما تكون التكاليف قد وصلت إلى أدنى حدٍّ لها عند مستوى إنتاج معيَّنٍ فإن ثمن عنصر الإنتاج لابد وأن يساوي التكلفة الإنتاجية الحدِّية المادية لهذا العنصر مضروبة في التكلفة الحدِّية.

كما أنه من المعادلة:

$$\frac{\partial C}{\partial q} = \lambda$$

نحصل على

$$\frac{\partial \lambda}{\partial q} = \frac{\partial^2 C}{\partial q^2}$$

وكذلك

$$\frac{\partial \lambda}{\partial p_j} = \frac{\partial^2 C}{\partial q \partial p_j}$$

إلا أنه عند التوازن

$$\lambda = \frac{p_j}{\phi_j}$$

وبالتفاضل نحصل على

$$\frac{\partial \lambda}{\partial p_j} = \frac{\phi_j \frac{\partial p_j}{\partial p_j} - p_j \frac{\partial \phi_j}{\partial p_j}}{(\phi_j)^2} = \frac{1}{\phi_j}$$

وبما أن

$$\phi_j = \frac{\partial q}{\partial x_j}$$

إذن

$$\frac{\partial \lambda}{\partial p_j} = \frac{\partial x_j}{\partial q}$$

وبتعويض قيم $\frac{\partial \lambda}{\partial p_j}$ نحصل على

$$\frac{\partial^2 C}{\partial q \partial p_j} = \frac{\partial x_j}{\partial q}$$

وتشير المعادلة الأخيرة إلى أن التغيّر في أي عنصر من عناصر الإنتاج بالنسبة للكمية المنتجة لابد وأن يساوي التغيّر في التكلفة الحدِّية بالنسبة لثمن هذا العنصر.

ويتطلب الشرط الكافي للتوازن أن تكون محددات هيشيان المطوقة كافة سالبة أو

$$\bar{S}'_j < 0; j = 2, 3, \ldots, n$$

حيث:

$$\bar{S}'_n = \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & \ldots & L_{1n} & -\phi_1 \\ L_{21} & L_{22} & \ldots & L_{2n} & -\phi_2 \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ L_{n1} & L_{n2} & \ldots & L_{nn} & -\phi_n \\ -\phi_1 & -\phi_2 & \ldots & -\phi_n & 0 \end{vmatrix}$$

وفي حالة ما إذا كان هناك عنصران إنتاج فقط فإن الشرط الكافي للتوازن يتطلب أن تكون $\bar{S}'_2$ سالبة ، ويمكن إثبات أن هذا الشرط يتحقق ، وبالتعويض نحصل على :

$$\bar{S}'_2 = \begin{vmatrix} -\lambda\phi_{11} & -\lambda\phi_{12} & -\phi_1 \\ -\lambda\phi_{21} & -\lambda\phi_{22} & -\phi_2 \\ -\phi_1 & -\phi_2 & 0 \end{vmatrix} < 0$$

وبالتعويض من المعادلة :

$$p_i = \lambda\phi_i$$

نحصل على

$$\bar{S}'_2 = \begin{vmatrix} -\lambda\phi_{11} & -\lambda\phi_{12} & -p_1/\lambda \\ -\lambda\phi_{21} & -\lambda\phi_{22} & -p_2/\lambda \\ -p_1/\lambda & -p_2/\lambda & 0 \end{vmatrix} < 0$$

وبحلّ هذه المعادلة نحصل على :

$$\bar{S}'_2 = \frac{1}{\lambda}\left[\, p_1^2\,\phi_{22} - 2\,p_1 p_2\,\phi_{12} + p_2^2\,\phi_{11} \,\right]$$

وحيث إن $0 < \lambda$ فإن الكمِّيات داخل القوس لابد وأن تكون سالبة حتى يتحقق الشرط الكافي للتوازن، إلا أن هذه الكميات ليست إلا صيغة تربيعية في المتغيّرين p_1, p_2 ؛ ومن ثم فإنها تكون سالبة بالتأكيد إذا كانت :

$$\phi_{11} < 0,\ \phi_{11}\,\phi_{22} > \phi_{12}^2$$

وعليه فإن تناقص الإنتاجية الحدِّية لعناصر الإنتاج ليس شرطًا كافيًا لتحقيق أقل تكلفة ممكنة .

مثال

المطلوب تصغير دالة التكاليف الآتية إلى أدنى حد .

$$C = p_1x_1 + p_2x_2$$

مع مراعاة أن :

$$\bar{q} = Ax_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$$

من دالة لاجرانج نحصل على :

$$L = p_1x_1 + p_2x_2 + \lambda (\bar{q} - Ax_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha})$$

تعطي الشروط الضرورية للتوازن :

$$L_1 = p_1 - \frac{\alpha \lambda \bar{q}}{x_1} = 0$$

$$L_2 = p_2 - \frac{(1-\alpha) \lambda \bar{q}}{x_2} = 0$$

$$L_\lambda = \bar{q} - A x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha} = 0$$

وهكذا فإن التكاليف تصل إلى نهايتها الصغرى عندما :

$$p_1 = \frac{\alpha \lambda \bar{q}}{x_1}$$

$$p_2 = \frac{(1-\alpha) \lambda \bar{q}}{x_2}$$

أو :

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{x_2}{x_1}$$

ويتطلب الشرط الكافي أن تكون $\bar{S}_2' < 0$

حيث :

$$\bar{S}'_2 = \begin{vmatrix} \dfrac{-\lambda}{x_1^2}\alpha(\alpha-1)\bar{q} & \dfrac{-\lambda}{x_1x_2}\alpha(1-\alpha)\bar{q} & \dfrac{-\alpha\bar{q}}{x_1} \\ \dfrac{-\lambda}{x_1x_2}\alpha(1-\alpha)\bar{q} & \dfrac{\lambda}{x_2^2}\alpha(1-\alpha)\bar{q} & \dfrac{-(1-\alpha)\bar{q}}{x_2} \\ \dfrac{-\alpha\bar{q}}{x_1} & \dfrac{-(1-\alpha)\bar{q}}{x_2} & 0 \end{vmatrix}$$

وبتعويض الشرط الضروري للتوازن :

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{x_2}{x_1}$$

نحصل على

$$\bar{S}'_2 = \begin{vmatrix} \dfrac{-p_1}{x_1}(\alpha-1) & \dfrac{-p_2\alpha}{x_1} & \dfrac{-\alpha\bar{q}}{x_1} \\ \dfrac{-p_1}{x_2}(1-\alpha) & \dfrac{p_2\alpha}{x_2} & \dfrac{-(1-\alpha)\bar{q}}{x_2} \\ \dfrac{-\alpha\bar{q}}{x_1} & \dfrac{-(1-\alpha)\bar{q}}{x_2} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (-)(-)\frac{1}{x_1x_2} \begin{vmatrix} p_1(\alpha-1) & p_2\alpha & \alpha\bar{q} \\ -p_1(1-\alpha) & p_2\alpha & -(1-\alpha)\bar{q} \\ \dfrac{\alpha\bar{q}}{x_1} & \dfrac{(1-\alpha)\bar{q}}{x_2} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{x_1x_2} \begin{vmatrix} p_1(\alpha-1) & p_2\alpha & \alpha\bar{q} \\ -p_1(1-\alpha) & p_2\alpha & -(1-\alpha)\bar{q} \\ \frac{p_1}{\lambda} & \frac{p_2}{\lambda} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{p_1p_2\,\bar{q}}{\lambda x_1x_2} \begin{vmatrix} \alpha-1 & \alpha & \alpha \\ -(1-\alpha) & \alpha & -(1-\alpha) \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{p_1p_2\,\bar{q}}{\lambda x_1x_2} \begin{vmatrix} \alpha-1 & 1 & \alpha \\ -(1-\alpha) & 1 & -(1-\alpha) \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{-p_1p_2\,\bar{q}}{\lambda x_1x_2} < 0$$

أي أن الشرط الكافي للتوازن يتحقق أيضًا، وعند التوازن:

$$C = p_1x_1 + p_2x_2 = \left(\frac{\alpha\lambda\bar{q}}{x_1}\right)x_1 + \left[\frac{(1-\alpha)\lambda\bar{q}}{x_2}\right]x_2$$

أي أن:

$$C = \lambda\bar{q}$$

(٤ ـ ٦) تكلفة الإنتاج طويلة الأجل

تصبح عناصر الإنتاج كافة متغيرة في الأجل الطويل، وهكذا لو كانت عناصر الإنتاج المتغيّرة في الأجل القصير هي $x_1, x_2, \dots, x_m$ ، بينما العناصر الثابتة هي $y_1, y_2, \dots, y_n$ فإن دالة تكاليف الإنتاج طويلة الأجل تكتب كالآتي:

$$C = \sum_{i=1}^{m} p_i x_i + \psi (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

حيث p_i تمثل سعر العنصر i $(i = 1, \dots, m)$.

لتصغير دالة التكلفة أعلاه إلى حدها الأدنى، مع الأخذ في الاعتبار قيد دالة الإنتاج:

$$\bar{q} = \phi (x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_n)$$

نستخدم دالة لاجرانج:

$$L = \sum_{i=1}^{m} p_i x_i + \psi (y_1, \dots, y_n) + \lambda \left(\bar{q} - \phi (x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_n)\right)$$

وتعطي الشروط الضرورية للتوازن:

$$L_{x_i} = \frac{\partial L}{\partial x_i} = p_i - \lambda \frac{\partial q}{\partial x_i} = 0 \; ; \; (i = 1, \dots, m)$$

$$L_{y_i} = \frac{\partial L}{\partial y_i} = \frac{\partial \psi}{\partial y_i} - \lambda \frac{\partial q}{\partial y_i} = 0 \; ; \; (i = 1, \dots, n)$$

$$L_{\lambda} = \bar{q} - \phi (x_1, \dots, x_m; y_1, \dots, y_n) = 0$$

وتعطي هذه المعادلات مع معادلة التكاليف عدد $m + n + 2$ معادلة يمكن حلها في عدد $m + n + 2$ متغيّر. ويعطي حل هذه المعادلات دالة الإنتاج طويلة الأجل:

$$C = C(q)$$

حيث C تمثل أقل تكلفة لإنتاج كمية ثابتة $\bar{q}$. ويلاحظ أن:

(i)

متوسط التكاليف الكلية في الأجل الطويل = متوسط التكاليف المتغيرة = $\frac{C}{q}$

(ii)

$$\text{التكلفة الحدِّية في الأجل الطويل} = \frac{dC}{dq}$$

(iii)

التكلفة الحدِّية في الأجل الطويل = التكلفة المتوسطة في الأجل الطويل (عند نهايتها الصغرى)

(iv)

تتساوى التكلفة الحدِّية في الأجل القصير مع التكلفة الحدِّية في الأجل الطويل عندما يصبح منحنى التكلفة المتوسطة في الأجل الطويل مماسًا لمنحنى التكلفة المتوسطة في الأجل القصير عند نهايته الصغرى.

(٤ - ٧) شروط إنتاج المنشآت ذوات المنتجات المتعددة

لنفترض أن هناك منشأة تنتج العديد من المنتجات، ففي هذه الحالة تكون دالة الإنتاج:

$$\phi\,(q_1, q_2, \ldots, q_k; x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

حيث q_j تشير إلى المنتج j وحيث x_i تشير إلى عنصر الإنتاج i.

فإذا افترضنا أن دالة التكاليف:

$$C = F + \sum_{i=1}^{n} p_i\, x_i$$

فإن مشكلة هذه المنشأة تصبح محاولة لتحقيق أقل تكلفة ممكنة لإنتاج كميات محددة (أو ثابتة) $\bar{q}_1, \bar{q}_2, \ldots, \bar{q}_k$.

من دالة لاجرانج نحصل على:

$$L = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i + F + \lambda\, \phi\,(\bar{q}_1, \bar{q}_2, \ldots, \bar{q}_k\, ; x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

وتعطي الشروط الضرورية للتوازن:

$$L_{x_i} = \frac{\partial L}{\partial x_i} = p_i + \lambda \frac{\partial \phi}{\partial x_i} = 0$$

$$L_{\bar{q}_j} = \frac{\partial L}{\partial \bar{q}_j} = \lambda \frac{\partial \phi}{\partial \bar{q}_j} = 0$$

$$L_\lambda = \phi\,(\bar{q}_1, \bar{q}_2, \ldots, \bar{q}_k; x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

حيث

$$j = 1, 2, \ldots, k; i = 1, 2, \ldots, n$$

وتشبه هذه المعادلات تمامًا تلك التي حصلنا عليها بالنسبة للمنشأة التي تنتج منتجًا واحدًا، وحيث إن $\lambda > 0$ فإنه يتبع ذلك:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \bar{q}_j} = 0$$

والذي لابد أن يحدث إذا كانت $\phi = 0$

وبحلِّ المعادلات التي نحصل عليها من الشرط الضروري للتوازن نحصل على دالة التكاليف:

$$C = C\,[\bar{q}_1, \bar{q}_2, \ldots, \bar{q}_k] + F$$

حيث تمثل C أقل تكلفة لإنتاج المنتجات

$$\bar{q}_1, \bar{q}_2, \ldots, \bar{q}_k$$

(٤ ـ ٨) اشتقاق دالة التكاليف من دالـة الإنتـاج

(٤ ـ ٨ ـ ١) حالة دالة كوب دوجلاس

لو افـترضنا أن إنتاج منشأة ما تتبع دالة كوب دوجلاس، وأن ثمن وحدة الإنتاج = p ،

وثمن وحـدة عنصر العمـل = W ، بينـما ثمن وحـدة عنصر رأس المال = I ، فإنه يمكننا أن نشتق دالة التكاليف؛ وإذا افترضنا أن المنشأة تعمل في ظل المنافسة الكاملة فإنه يمكننا أن نشتق دالة العرض، ويمكننا توضيح ذلك فيما يلي:

لنفترض أن دالة إنتاج كوب دوجلاس هي

$$q = A L^{\alpha} K^{\beta}$$

ولنفترض أن تكلفة الإنتاج:

$$C = WL + IK$$

حيث C تمثّل التكاليف الكلية، فإننا نحصل من المعادلة الأخيرة على:

$$K = \frac{C - WL}{I}$$

وبالتعويض من هذه المعادلة في دالة كوب دوجلاس نحصل على:

$$q = AL^{\alpha} \left(\frac{C - WL}{I} \right)^{\beta}$$

ومن هذه المعادلة الأخيرة نحصل على:

$$\frac{dq}{dL} = \alpha AL^{\alpha-1} \left(\frac{C - WL}{I} \right)^{\beta} + AL^{\alpha} \beta \left(\frac{C - WL}{I} \right)^{\beta-1} \left(-\frac{W}{I} \right)$$

$$= \left[AL^{\alpha-1} \left(\frac{C - WL}{I} \right)^{\beta-1} \right] \left[\alpha \frac{C - WL}{I} - \beta L \frac{W}{I} \right]$$

حينما يكون الإنتاج عند نهايته العظمى نحصل على:

$$\frac{dq}{dL} = 0$$

حيث إن:

$$L^{\alpha-1} > 0; A > 0$$

$$\left(\frac{C-WL}{I}\right)^{\beta-1} > 0 ; \frac{C-WL}{I} > 0$$

وهكذا فإن :

$$A L^{\alpha-1}\left(\frac{C-WL}{I}\right)^{\beta-1} > 0$$

ومعنى ذلك أنه عندما يكون الإنتاج عند نهايته العظمى فإن :

$$\alpha\left(\frac{C-WL}{I}\right) - \beta L\frac{W}{I} = 0$$

ومن هذه المعادلة الأخيرة نحصل على :

$$\frac{\alpha C}{I} - \frac{\alpha WL}{I} = \frac{\beta WL}{I}$$

ومنها نحصل على :

$$\alpha C = WL(\alpha + \beta)$$

أو

$$L = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \cdot \frac{C}{W}$$

وبالتعويض من هذه المعادلة في المعادلة :

$$K = \frac{C-WL}{I}$$

نحصل على :

$$K = \frac{C - W\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\quad\dfrac{C}{W}}{I}$$

$$K = \frac{\alpha C + \beta C - \alpha C}{I(\alpha+\beta)}$$

ومنها نحصل على :

$$K = \frac{\beta}{\alpha+\beta} \cdot \frac{C}{I}$$

وبالتعويض عن قيمة K في المعادلة الأخيرة وقيمة :

$$L = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \cdot \frac{C}{W}$$

وبالتعويض في دالة كوب دوجلاس نحصل على :

$$q = A\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta} \cdot \frac{C}{W}\right)^{\alpha}\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta} \cdot \frac{C}{I}\right)^{\beta}$$

$$= A\left(\frac{1}{\alpha+\beta}\right)^{\alpha+\beta}\left(\frac{\alpha}{W}\right)^{\alpha}\left(\frac{\beta}{I}\right)^{\beta} C^{\alpha+\beta}$$

وهكذا فإن :

$$C^{\alpha+\beta} = \frac{q}{A}\left(\frac{W}{\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{I}{\beta}\right)^{\beta}(\alpha+\beta)^{\alpha+\beta}$$

ومنها نحصل على :

$$C = (\alpha+\beta)\left(\frac{q}{A}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\left(\frac{W}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\left(\frac{I}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}$$

وهي دالة التكاليف.

ويمكن استنتاج دالة العرض باستخدام المساواة

$$MC = \frac{\partial C}{\partial q} = p$$

وذلك لأنه عند التوازن في ظل المنافسة الكاملة يساوي الثمن (p) التكلفة الحدِّية (MC).

ومن المعادلة الأخيرة نحصل على:

$$P = \frac{\partial C}{\partial q} = \frac{1}{\alpha+\beta} \cdot \frac{\alpha+\beta}{A^{\frac{1}{\alpha+\beta}}} q^{\frac{1}{\alpha+\beta}-1} \left(\frac{W}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \cdot \left(\frac{I}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}$$

ومن ثم فإن:

$$q^{\frac{1}{\alpha+\beta}-1} = A^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\alpha}{W}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \left(\frac{\beta}{I}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} \cdot p$$

$$q = A^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \left(\frac{\alpha}{W}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}} \left(\frac{\beta}{I}\right)^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}} p^{\frac{\alpha+\beta}{1-\alpha-\beta}}$$

وهي عبارة عن دالة عرض أي منشأة تتبع دالة إنتاج كوب دوجلاس، وتعمل في ظل المنافسة الكاملة.

ويلاحظ أن دالـة التكاليف خطّية في لوغاريتم الأجور (ثمن العمل)، وسعر الفائدة (ثمن رأس المال)، ومستوى الإنتاج.

كما يلاحظ أنـه إذا كانت $(\alpha + \beta) = 1$ ، فإن التكلفـة تصبح نسبية لمستوى الإنتاج، ويصبح منحنى العرض مرنًا مرونة لانهائية.

(٤ ـ ٨ ـ ٢) حالة دالة إنتاج C.E.S

يمكن أيضًا اشتقاق دالة التكاليف إذا كانت المنشأة تتبع دالة الإنتاج SMAC ، ويمكن توضيح ذلك كالآتي:

لنفترض أن تكلفة الإنتاج هي :

$$C = IK + WL$$

ومن ثم فإن :

$$L = \frac{C - IK}{W}$$

وبالتعويض في دالة C.E.S نحصل على :

$$q = \gamma \left[\lambda K^{-\varrho} + (1 - \lambda) \left(\frac{C - IK}{W} \right)^{-\varrho} \right]^{-\frac{1}{\varrho}}$$

ولتعظيم الإنتاج يجب أن يكون :

$$\frac{dq}{dK} = 0$$

وهكذا نحصل عند التوازن على :

$$\frac{dq}{dK} = -\frac{1}{\varrho}\,\gamma\left[\lambda K^{-\varrho} + (1-\lambda)\,L^{-\varrho}\right]^{-\frac{1}{\varrho}-1}$$

$$\times\left\{-\varrho\left[\lambda k^{-\varrho-1} - (1-\lambda)\frac{I}{W}\left(\frac{C-IK}{W}\right)^{-\varrho-1}\right]\right\} = 0$$

ويتحقق هذا عندما:

$$\lambda K^{-\varrho-1} - (1-\lambda)\frac{I}{W}\left(\frac{C-IK}{W}\right)^{-\varrho-1} = 0$$

أو:

$$\lambda K^{-\varrho-1} = (1-\lambda)\frac{I}{W}\left(\frac{C-IK}{W}\right)^{-\varrho-1}$$

فإذا قسمنا طرفيْ المعادلة على $K^{-\varrho-1}$ نحصل على:

$$\lambda = (1-\lambda)\frac{I}{W}\left(\frac{C-IK}{W}\right)^{-\varrho-1} K^{\varrho+1}$$

وبقسمة الطرفين على

$$\left(\frac{C-IK}{W}\right)^{-\varrho-1}$$

نحصل على

$$\lambda\left(\frac{C-IK}{W}\right)^{1+\varrho} = (1-\lambda)\frac{I}{W}K^{1+\varrho}$$

ويمكن إعادة كتابة هذه المعادلة كالآتي:

$$\lambda^{\frac{1}{1+\varrho}}\ \frac{C-IK}{W} = (1-\lambda)^{\frac{1}{1+\varrho}}\left(\frac{I}{W}\right)^{\frac{1}{1+\varrho}} K$$

وبضرب طرفيْ المعادلة في W نحصل على :

$$\lambda^{\frac{1}{1+\varrho}} (C - IK) = (1-\lambda)^{\frac{1}{1+\varrho}} I^{\frac{1}{1+\varrho}} W^{\frac{\varrho}{1+\varrho}} K$$

ومن هذه المعادلة نحصل على :

$$\lambda^{\frac{1}{1+\varrho}} C = \lambda^{\frac{1}{1+\varrho}} IK + (1-\lambda)^{\frac{1}{1+\varrho}} I^{\frac{1}{1+\varrho}} W^{\frac{\varrho}{1+\varrho}} K$$

$$\lambda^{\frac{1}{1+\varrho}} C = K \left[\lambda^{\frac{1}{1+\varrho}} I + (1-\lambda)^{\frac{1}{1+\varrho}} I^{\frac{1}{1+\varrho}} W^{\frac{\varrho}{1+\varrho}} \right]$$

وبقسمة طرفيْ المعادلة على :

$$I^{\frac{1}{1+\varrho}}$$

نحصل على

$$\left(\frac{\lambda}{I}\right)^{\frac{1}{1+\varrho}} C = K \left[\lambda^{\frac{1}{1+\varrho}} I^{\frac{\varrho}{1+\varrho}} + (1-\lambda)^{\frac{1}{1+\varrho}} W^{\frac{\varrho}{1+\varrho}} \right]$$

وبوضع

$$Q = \left(\frac{\lambda}{I}\right)^{\frac{1}{1+\varrho}}$$

وكذلك بوضع

$$M = \lambda^{\frac{1}{1+\varrho}} I^{\frac{\varrho}{1+\varrho}} + (1-\lambda)^{\frac{1}{1+\varrho}} W^{\frac{\varrho}{1+\varrho}}$$

وكذلك بوضع

$$N = \left(\frac{1-\lambda}{W} \right)^{\frac{1}{1+\varrho}}$$

نحصل على

$$K = \frac{CQ}{M}$$

$$L = \frac{CN}{M}$$

وبتعويض هذه القيم في دالة الإنتاج نحصل على:

$$q = \gamma \left[\lambda \left(\frac{CQ}{M} \right)^{-\varrho} + (1-\lambda) \left(\frac{CN}{M} \right)^{-\varrho} \right]^{-\frac{1}{\varrho}}$$

$$q = \gamma \left[C^{-\varrho} M^{\varrho} \{\lambda Q^{-\varrho} + (1-\lambda) N^{-\varrho}\}\right]^{-\frac{1}{\varrho}}$$

$$q^{-\varrho} = \gamma^{-\varrho} \left[C^{-\varrho} M^{\varrho} \{\lambda Q^{-\varrho} + (1-\lambda) N^{-\varrho}\}\right]$$

وهكذا فإن:

$$C^{-\varrho} = q^{-\varrho} \gamma^{\varrho} M^{-\varrho} [\lambda Q^{-\varrho} + (1-\lambda) N^{-\varrho}]^{-1}$$

$$C = q \gamma^{-1} M [\lambda Q^{-\varrho} + (1-\lambda) N^{-\varrho}]^{\frac{1}{\varrho}}$$

وبالتعويض عن قيمة M

$$M = \lambda^{\frac{1}{1+\varrho}} \quad I^{\frac{\varrho}{1+\varrho}} \quad + (1-\lambda)^{\frac{1}{1+\varrho}} \quad W^{\frac{\varrho}{1+\varrho}}$$

في المعادلة الأخيرة نحصل على:

$$C = \frac{q}{\gamma}\left[\lambda^{\frac{1}{1+\varrho}} \; I^{\frac{\varrho}{1+\varrho}} + (1-\lambda)^{\frac{1}{1+\varrho}} \; W^{\frac{\varrho}{1+\varrho}} \right]$$

$$\times \left[\lambda\, Q^{-\varrho} + (1-\lambda)\, N^{-\varrho} \right]^{\frac{1}{\varrho}}$$

وبالتعويض عن قيمتي Q ، N في المعادلة الأخيرة نحصل على:

$$C = \frac{q}{\gamma}\left[\lambda^{\frac{1}{1+\varrho}} \; I^{\frac{\varrho}{1+\varrho}} + (1-\lambda)^{\frac{1}{1+\varrho}} \; W^{\frac{\varrho}{1+\varrho}} \right]$$

$$\times \left[\lambda^{\frac{1}{1+\varrho}} \; I^{\frac{\varrho}{1+\varrho}} + (1-\lambda)^{\frac{1}{1+\varrho}} \; W^{\frac{\varrho}{1+\varrho}} \right]^{\frac{1}{\varrho}}$$

$$C = \frac{1}{\gamma}\left[\lambda^{\frac{1}{1+\varrho}} \; I^{\frac{\varrho}{1+\varrho}} + (1-\lambda)^{\frac{1}{1+\varrho}} \; W^{\frac{\varrho}{1+\varrho}} \right]^{\frac{1+\varrho}{\varrho}} q$$

$$C = \frac{1}{\gamma}\left\{ (\lambda\, I^{\varrho})^{\frac{1}{1+\varrho}} + \left[(1-\lambda)\, W^{\varrho} \right]^{\frac{1}{1+\varrho}} \right\}^{\frac{1+\varrho}{\varrho}} q$$

وهي دالة التكاليف، ويلاحظ أنها دالة خطية في الإنتاج، وهو ما نتوقعه في حالة دوال الإنتاج الخطية المتجانسة [Dhrymes, 1965].

(٤ ـ ٩) تمرينـات

١) أثبت أن دالة التكاليف

$$C = a + \frac{(x-1)^3}{g}$$

(حيث a, g معاملات ثابتة موجبة) ليس لها نهاية صغرى.

٢) احسب مستوى الإنتاج الذي تكون عنده التكلفة أقل ما يمكن، موضحًا أن كافة شروط التوازن قد تحققت، علمًا بأن دالة التكلفة هي :

$$C = 2(q-3)^4 + 20$$

٣) إذا كانت التكلفة الكلية :

$$TC = a\,x\,\frac{x+b}{x+c} + d$$

أثبت أن التكلفة الحدِّية :

$$MC = a\left[\,1 + \frac{c\,(b-c)}{(x+c)^2}\,\right]$$

وإذا كانت $a > 0$ ، $c > 0$ ، $b > 0$ استنتج أن التكلفة الحدِّية تتناقص باستمرار مع زيادة الإنتاج.

٤) يقوم مصنع بإنتاج نوعين من السلع x, y ، فإذا كانت التكلفة الكلية لإنتاج السلعتين هي :

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - xy$$

احسب كمية الإنتاج الواجب إنتاجها من كل نوع، لتحقيق أقل تكلفة ممكنة، وبشرط ألا يزيد مجموع إنتاج السلعتين عن ٨ وحدات.

٥) إذا كانت العلاقة بين المبيعات S ، والمبالغ المنفقة على الإعلان في التليفزيون x ، والجرائد y ، كالآتي :

$$S = \frac{200\,x}{5+x} + \frac{100\,y}{10+y}$$

فإذا كان الربح الصافي يعادل $\frac{١}{٥}$ المبيعات ناقصًا تكلفة الإعلان، وكانت ميزانية الإعلان تساوي **٢٥**، احسب كيف يجب أن توزع هذه الميزانية بين التليفزيون والجرائد حتى يتحقق أقصى ربح ممكن.

٦) حدِّد بالنسبة لدوال التكاليف الآتية التكلفة الحدِّية، ووضِّح في أي حالة أو تحت أي ظروف، تكون هذه التكلفة ذات معنى اقتصادي :

$$\frac{C}{q} = \frac{20}{q} + 3 + 0.5\,q$$

$$\frac{C}{q} - 2 = \frac{100}{q} + 0.2\,q$$

$$C - 100 - 2q + 2q^2 = q^3$$

$$q\left(\frac{C}{q}\right) = a + bq - cq^2 + g\,q^3$$

حيث a, b, c, g معاملات ثابتة موجبة. ثم احسب التكلفة الحدِّية عندما $q = 4$ في كل من دوال الإنتاج الثلاث الأوَل.

٧) توضِّح الدوال الآتية التكاليف المتوسطة AC والتكاليف الكلية TC لمنشأة ما :

$$AC = \frac{140}{q} + 20$$

$$AC - \frac{a}{q} = K$$

$$TC - 10 = 2q + 0.1q^2$$

$$TC - k - \beta q = cq^2$$

حيث تكون a, k, β, c معاملات ثابتة موجبة.

(أ) احسب قيم q التي تكون عندها AC متناقصة.

(ب) حدِّد أي دوال تعطي تكلفة متوسطة على شكل U.

٨) أثبت أن التكلفة الحدِّية لكل من الحالات الآتية تساوي التكلفة المتوسطة عندما تكـون الأخيرة عند نهايتها الصغرى. افترض في كل حالة أن C تمثل التكاليف الكلية بينما x تمثل كمية الإنتاج.

$$\frac{C}{x} = 25 - 8x + x^2$$

$$\frac{C}{x} = 2 + x \ln x$$

$$\frac{C}{x} = 0.2e^x + e^{-x}$$

٩) حدِّد سلوك التكلفـة الحـدِّية والتكلفـة المتوسطة لكل من دوال التكاليف الآتية (حيث C تمثِّل التكاليف الكلية، وحيث x تمثِّل كمية الإنتاج):

$$C = \sqrt{x + 25}\,; 0 \leqslant x \leqslant 10$$

$$C = 9x + 5xe^{-2x}$$

الفصل الخامس

تـوازن المنشأة

يميِّز الاقتصاديون بين أنواع الأسواق المختلفة طبقًا للآتي:

ا - عدد البائعين

ب - عدد المشترين

جـ - مقدار المعلومات المتوافرة للبائعين والمشترين

د - أهداف البائعين والمشترين

هـ - درجة تجانس السلعة

و - حرية انتقال عناصر الإنتاج

ز - قابلية الموارد الإنتاجية للتقسيم

ح - توقعات البائعين والمشترين

وسوف نتعرض في هذا الفصل لدراسة ثلاثة أنواع من الأسواق: سوق المنافسة الكاملة، والاحتكار الكامل، واحتكار القلة.

(٥ - ١) حالة المنافسة الكاملة

تتميز حالة المنافسة الكاملة بوجود عدد كبير جدًا من البائعين والمشترين الذين يتعاملون في سلعة متجانسة. يحاول كل مشترٍ أن يحقق أقصى إشباع ممكن، ويحاول كل بائع أن يحقق أقصى ربح ممكن؛ كما أن كل مشترٍ يكون على علم تام بذوقه وبأسعار المنتجات، وبمقدرتها على تلبية حاجاته، وكل بائع يكون على علم تام بكمية الإنتاج التي يمكن إنتاجها من تجميع خدمات عناصر الإنتاج، وعلى علم تام بأسعار هذه

الخدمات، كما أن كل الخدمات الإنتاجية قابلة للتقسيم الكامل، وقادرة على الانتقال بحرية تامة، وأن أصحابها على علم تام بحالة السوق، وأخيرا لا توجد عوائق تنظيمية أو قانونية تقف ضد الدخول في أي صناعة.

وتتميَّز المنافسة الكاملة بأن المنتج لايمكن أن يتحكم في السعر؛ فالسعر يعطي له، ومن ثم فإن المنشأة تأخذ السعر كما هو، فلو كان هدف المنشأة تحقيق أقصى ربح ممكن فإنها سوف تسعى نحو تحقيق أقصى فرق بين الإيراد الكلي والتكلفة الكلية؛ أي أن مشكلة المنشأة تصبح تعظيم الدالة:

$$\Pi = R - C$$

حيث: Π تمثل الربح الكلي

R تمثل الإيراد الكلي

C تمثل التكلفة الكلية

ولكن:

$$R = pq$$

حيث p تمثِّل سعر البيع، q تمثِّل الكمية المباعة وهكذا نحصل على:

$$\Pi = pq - C$$

وعندما تحقق المنشأة أقصى ربح ممكن فإننا نحصل على:

$$\text{(i)} \qquad \frac{d\Pi}{dq} = 0$$

$$\text{(ii)} \qquad \frac{d^2\Pi}{dq^2} = 0$$

لكن:

$$\frac{d\Pi}{dq} = \frac{d}{dq}(pq) - \frac{dC}{dq}$$

$$= p\frac{dq}{dq} + q\frac{dp}{dq} - \frac{dC}{dq}$$

وحيث إن السعر ثابت في حالة المنافسة الكاملة فإن:

$$\frac{dp}{dq} = 0$$

وبالتعويض نحصل على:

$$\frac{d\Pi}{dq} = p - \frac{dC}{dq}$$

ويتبع ذلك أنه عند تعظيم الأرباح فإن

$$p - \frac{dC}{dq} = 0$$

أو

$$p = \frac{dC}{dq} = MC$$

ومن ثم تحقق المنشأة التي تعمل في ظل المنافسة الكاملة أقصى ربح ممكن عند مستوى الإنتاج الذي يحقق التساوي بين التكلفة الحدِّية والثمن.

أما الشرط الكافي للتوازن فيتطلب:

$$\frac{d^2\Pi}{dq^2} = -\frac{d^2C}{dq^2} < 0$$

أو

$$\frac{d}{dq}(MC) > 0$$

أي أن التكلفة الحدِّية لابد وأن تكون في تزايد عند نقطة التوازن [Cyert and March, 1963].

وبـالإضـافـة إلى هذه الشروط فإن المنشـأة لابـد أن تغطي في الفترة الطويلة تكـاليف إنتـاجهـا ؛ أي أنـه في الفترة الطويلة يصبح منحنى الطالب مماسًا لمنحنى التكاليف المتوسطة ، وهكذا فإن المنشأة التي تعمل في ظل المنافسة الكاملة تحقق الآتي في الفترة الطويلة .

الثمن = التكلفة الحدِّية = التكلفة المتوسطة

أي أن منشآت المنافسة الكاملة تصل إلى حجمها الأمثل في الأجل الطويل ؛ أي أن كل منشأة تنتج بأقل تكلفة ممكنة ، وتبيع الإنتاج بسعر يساوي هذه التكلفة ، فتختفي الأرباح الاستثنائية [الليثي وسيفين، ١٩٨٢م] .

هذا وقـد سبق أن رأينا في الفصول السابقة ، أن الإنتاج يتم بتجميع عناصر الإنتاج بشرط تحقيق أقل تكلفة ممكنة ، وتصل تكلفة الإنتاج إلى أدناها عندما تتساوى الإنتاجية الحدِّية للوحدة النقدية الأخيرة في جميع الاستخدامات ، كما أثبتنا أيضًا أن ثمن كل عنصر من عناصر الإنتاج يجب أن يكون متناسبًا مع إنتاجية الحدِّية المادية ، وأن وحدة التناسب تكون التكلفة الحدِّية ، ووجدنا أنه عند تحقيق توازن المنشأة يكون ثمن كل عنصر من عناصر الإنتاج مساويًا لقيمة إنتاجية الحدِّية .

ورأينا أنه في حالة المنشأة ذات الإنتاج المتعدد التي تعمل في ظل المنافسة الكاملة تكون نسبة أثمان المنتجات ، عند التوازن مساوية لمعدّل الإحلال الحدِّي بين المنتجات ، إذا كان استخدام عناصر الإنتاج ثابتًا ، كما أن نسبة أثمان عناصر الإنتاج تكون مساوية لمعـدّل الإحـلال الحدِّي بين العناصر ، إذا كانت المنتجات ثابتة ، وتكون نسبة ثمن عنصر الإنتاج إلى ثمن السلعة ، عند التوازن ، مساويًا للإنتاجية الحدِّية لهذا العنصر .

هذا ورأينا أنه في حالة ثبات الغلة تتزايد كميات عناصر الإنتاج وكميات الإنتاج بالنسبة نفسها ، وتكون دالة الإنتاج متجانسة من الدرجة الأولى . وطبقًا لنظرية أويلر فإنه عند التوازن يوزع المنتج تمامًا بين عناصر الإنتاج طبقًا لإنتاجيتها الحدِّية ، ويكون صافي العائد المعظم مساويًا صفرًا .

(٥ ـ ٢) حالة الاحتكار الكامل

يطلق لفظ «الاحتكار الكامل» على تلك الأسواق التي يكون فيها بائع واحد، وعـدد كبـير من المشـترين، وتكون السلعة متجانسة. والمحتكر يعتبر محددًا للسعر، فيحدد سعره طبقًا للطلب على الصناعة، وأثر إنتاجه على هذا الطلب؛ فكلما زاد إنتاجه انخفض الثمن، وهكذا فإن منحنى الطلب (أو الإيراد المتوسط) ينحدر إلى أسفل نحو اليمين، ولا يمكن أن يصبح أفقيًا، كما في حالة المنافسة الكاملة؛ ولذلك يكون إيراده الحدِّي أقل من الثمن، كما يتضح من العلاقة التي سبق أن أثبتناها، والتي نعيد كتابتها هنا:

$$MR = p\left(1 - \frac{1}{\eta}\right)$$

MR = الإيراد الحدِّي
p = الثمن
η = مرونة الطلب السعرية

ويتضح بجلاء، من المعادلة أعلاه، أن المحتكر لا يرغب أبدًا في أن يستمر في الإنتاج، إذا كان الطلب على سلعته قليل المرونة؛ أي إذا كانت $\eta < 1$.

ولتحقيق أقصى ربح ممكن يحاول المحتكر أن يحصل على أقصى فرق بين الإيراد الكلي والتكلفة الكلية؛ أي أن مشكلته تصبح تعظيم الدالة:

$$\Pi = R - C$$

حيث

$$R = pq;\ p = f(q)$$

وترمز Π للربح، R للإيراد الكلي، C للتكلفة الكلية، p للسعر، q للكمية المباعة (أو المنتجة). وهكذا تصبح مشكلة المحتكر تحقيق أقصى قدر ممكن للربحية التي تمثِّلها المعادلة الآتية:

$$\Pi = pq - C$$

ويتطلب هذا أن تتحقق الشروط الآتية

$$\frac{d\Pi}{dq} = 0 \qquad \text{(i)}$$

$$\frac{d^2\Pi}{dq^2} < 0 \qquad \text{(ii)}$$

وحيث إن:

$$\frac{d\Pi}{dq} = \frac{d}{dq}(pq) - \frac{dC}{dq}$$

فإنه عند التوازن:

$$\frac{d}{dq}(pq) = \frac{dC}{dq}$$

أي أن المحتكر يحقق أقصى ربح ممكن عندما:

$$MR = MC$$

الإيراد الحدِّي = التكلفة الحدِّية

ويتطلب الشرط الكافي للتوازن:

$$\frac{d^2\Pi}{dq^2} < 0$$

أو:

$$\frac{d^2\Pi}{dq^2}(pq) - \frac{d^2C}{dq^2} < 0$$

أو:

$$\frac{d^2\Pi}{dq^2}(pq) < \frac{d^2C}{dq^2}$$

أو:

$$\frac{d}{dq}(MR) < \frac{d}{dq}(MC)$$

أي أن الشرط الكافي للتوازن يتطلب أن تتزايد التكلفة الحدِّية بمعدَّل أسرع من الإيراد الحدِّي عند نقطة التوازن.

ومن شروط توازن المحتكر يمكن استنتاج أنه عندما يحقق المحتكر أقصى ربح ممكن تكون العلاقة بين الثمن والتكلفة الحدِّية والمرونة كالآتي:

$$\eta = \frac{p}{p - MC}$$

ويمكن إثبات أن المحتكر الذي يحدِّد السعر، ويترك تحديد الكميات المنتجة لظروف الطلب، يصل إلى النتيجة نفسها، كالمحتكر الذي يحدد الكمية المنتجة ويترك تحديد السعر لظروف الطلب [Rosenmuller, 1981].

(٥ ـ ٢ ـ ١) المحتكر الذي يحدد الإنتاج ويترك ظروف الطلب تحدد السعر

وفي هذه الحالة نحصل على:

$$p = f(q)$$

لكن:

$$R = pq - q\,f(q)$$

وعند تعظيم الربح:

$$MR = MC$$

لكن:

$$MR = \frac{d}{dq}(pq)$$

$$= p + q\frac{dp}{dq}$$

ولذلك عند تحقيق أقصى ربح ممكن تكون:

$$q \frac{dp}{dq} = MC - p$$

وبناءً على ذلك:

$$R = p \, . \, g(p)$$
$$\Pi = pq - C$$

وعندما يتحقق أقصى ربح ممكن فإننا نحصل على:

$$\frac{d\Pi}{dp} = \frac{dq}{dp} p + q - \frac{dC}{dp} = 0$$

وهكذا فإن:

$$q + p \frac{dq}{dp} = \frac{dC}{dp}$$

وبضرب الطرفين في $\frac{dp}{dq}$ نحصل على:

$$q \frac{dp}{dq} + p = \frac{dC}{dq}$$

أو:

$$q \frac{dp}{dq} + p = MC$$

ومن ثم فإن:

$$q = (MC - p) \frac{dq}{dp}$$

وبضرب الطرفين في $\frac{p}{q}$ نحصل على:

$$q = \frac{dq}{dp}(MC - p)$$

وبضرب طرفيْ المعادلة في $\frac{p}{q}$ نحصل على:

$$p = \frac{p}{q}\frac{dq}{dp}(MC - p)$$

أو

$$p = \eta\,(p - MC)$$

وبناءً على ذلك فإن المحتكر الذي يحدِّد إنتاجه، ويترك السعر ليتحدد بظروف الطلب، يحقق أقصى ربح ممكن عندما:

(i) يتساوى إنتاجه مع حاصل ضرب الفرق بين التكلفة الحدِّية والسعر في معدَّل تغيّر الطلب بالنسبة للسعر.

(ii) يتساوى سعره مع حاصل ضرب مرونة الطلب السعرية في الفرق بين السعر والتكلفة الحدِّية [Allen, 1976 and Chamberlin, 1933].

(٥ ـ ٢ ـ ٢) المحتكر الذي يحدِّد سعره ويترك ظروف الطلب تحدد إنتاجه

في هذه الحالة نحصل على:

$$q = g\,(p)$$

وبناءً على ذلك فإن:

$$p = \frac{p}{q}\frac{dq}{dp}(MC - p)$$

أو:

$$p = \eta\,(p - MC)$$

وهي النتائج نفسها التي حصلنا عليها في حالة المحتكر الذي يحدِّد إنتاجه ويترك السعر يتحدَّد بظروف الطلب.

(٥ ـ ٢ ـ ٣) توازن المحتكر الذي ينتج أكثر من سلعة

يمكن أيضًا تحديد مستويات الإنتاج التي تحقِّق للمحتكر أقصى ربح ممكن، إذا كان هذا المحتكر يقوم بإنتاج أكثر من سلعة.

لنفترض أن محتكرًا ينتج عدد n من السلع :

$$q_1, q_2, \dots, q_n$$

حيث :

$$q_j = q_j(p_1, p_2, \dots, p_j, \dots, p_n); \ (j = 1, \dots, n)$$

ولنفترض أن دالة تكاليفه هي :

$$C = C(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

فيصبح إيراده الكلي مساويًا :

$$R = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i$$

ويصبح ربحه الكلي مساويًا :

$$\Pi = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i - C(q_1, q_2, \dots q_n)$$

أو:

$$\Pi = \phi(P_1, P_2, \dots, P_n)$$

ولتحقيق أقصى ربح ممكن لابد أن تتحقق الشروط الآتية:

$$(i)\ \frac{\partial \Pi}{\partial p_i} = \frac{\partial \phi}{\partial p_i} = \phi_i = 0;\ (i=1, \ldots, n)$$

$$(ii)\ S_j < 0 \qquad ; j = 1, \ldots, n$$

حيث S_j محددة هيشيان (غير مطوقة) وحيث:

$$S_n = \begin{vmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdot\cdot & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdot\cdot & \phi_{2n} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \cdot\cdot & \phi_{nn} \end{vmatrix}$$

وحيث:

$$\phi_{ii} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial p_i^2}$$

$$\phi_{ij} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial p_i \partial p_j}$$

(٥ ـ ٢ ـ ٤) التمييز السعري

إذا كان المحتكر يبيع سلعته في سوقين مختلفين منعزلين، لكل منهما مرونة طلب سعرية تختلف عن الأخرى، فإنه يستطيع أن يحقق أقصى ربح ممكن بتحديد سعر مختلف في السوقين.

وإذا كان المحتكر يقوم بإنتاج السلعتين في مصنع واحد فإنه سوف تكون تكلفة إنتاجه متساوية بالنسبة للكميات التي تباع في السوقين؛ فإذا كان يبيع الكمية q_1 في السوق الأول والكمية q_2 في السوق الثاني فإن مبيعاته الكلية تساوي:

$$q = q_1 + q_2$$

وتكون تكاليفه:

$$C = f(q)$$
$$= f(q_1 + q_2)$$

أما ربحه فيساوي مجموع إيراداته من السوقين ناقصًا التكلفة الكلية، ويكون إيراده من السوق الأولى R_1 وإيراده من السوق الثاني R_2، وهكذا يكون مجمل ربحه من السوقين مساويًا:

$$\Pi = R_1(q_1) + R_2(q_2) - C(q)$$

وللوصول بهذا الربح لأقصى حد ممكن فإن ذلك يتطلب تحقيق الشرط الأساسي التالي:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = 0$$

وحيث إن:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = \frac{\partial}{\partial q_1}\Big(R_1(q_1) \Big) + \frac{\partial}{\partial q_1}\Big(R_2(q_2) \Big) - \frac{\partial C(q)}{\partial q_1}$$
$$= MR_1 - MC$$
$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = \frac{\partial}{\partial q_2}\Big(R_1(q_1) \Big) + \frac{\partial}{\partial q_2}\Big(R_2(q_2) \Big) - \frac{\partial C(q)}{\partial q_2}$$
$$= MR_2 - MC$$

وهكذا فإنه عند التوازن:

$$MR_1 = MC$$
$$MR_2 = MC$$

أو:

$$MR_1 = MR_2 = MC$$

أي أن الإيراد الحدِّي لأي سوق يجب أن يكون مساويًا للإيراد الحدِّي للسوق الآخر، ومساويًا للتكلفة الحدِّية .

هذا، وسبق أن أثبتنا أن العلاقة بين مرونة الطلب السعرية والإيراد الحدِّي كما يأتي :

$$MR = p\left(1 - \frac{1}{\eta}\right)$$

فإذا كانت η_1 مرونة الطلب في السوق الأول، وكانت η_2 مرونة الطلب في السوق الثاني، فإننا نحصل على :

$$MR_1 = MR_2$$

$$p_1\left(1 - \frac{1}{\eta_1}\right) = p_2\left(1 - \frac{1}{\eta_2}\right)$$

وهكذا فإن :

$$\frac{p_1}{p_2} = \left(1 - \frac{1}{\eta_2}\right) / \left(1 - \frac{1}{\eta_1}\right)$$

فإذا كانت :

$$\eta_1 > \eta_2$$

فإن

$$p_1 / p_2 < 1$$

وإذا كانت :

$$\eta_1 < \eta_2$$

فإن :

$$p_1 / p_2 > 1$$

وإذا كانت :

$$\eta_1 = \eta_2$$

فإن :

$$p_1 / p_2 = 1$$

ومن ثم فإن المحتكر سوف يحدد سعرًا أعلى في السوق الذي يتمتع بمرونة طلب أقل .

(٥ ـ ٢ ـ ٥) أثر الضرائب غير المباشرة على توازن المحتكر

إذا فرضت الحكومة ضريبة ثابتة على أرباح المحتكر فإن هذه الضريبة لا تؤثّر في شروط التوازن (أي شروط تحقيق أقصى ربح ممكن)، حيث إنها تضاف إلى التكلفة الثابتة، وهكذا فإنها لا تغيّر من $(d\Pi / dq)$.

أما إذا فرضت الحكومة ضريبة على كل وحدة منتجة فإن التكلفة الكلية سوف تزداد بمقدار:

$$tq$$

حيث t تمثّل معدّل الضريبة، q تمثّل الكمية المنتجة، وسوف ينتج عن هذه الضريبة نقص في كمية الإنتاج التي تحقّق للمحتكر أقصى ربح ممكن.

وتكون حصيلة الدولة من فرض هذه الضريبة مساوية :

$$T = tq$$

وتصل هذه الحصيلة إلى أقصاها عندما

$$\frac{dT}{dt} = 0 \qquad \text{(i)}$$

$$\frac{d^2T}{dt^2} < 0 \qquad \text{(ii)}$$

أما تأثير الإعانة فيكون عكس تأثير الضرائب غير المباشرة، فإذا منحت هذه الإعانة عن كل وحدة منتجة بمعدّل s ، فإن التكلفة سوف تنقص بمقدار (sq) [Musgrave, 1959].

(٥ ـ ٣) حالة احتكار القلة

حالة احتكار القلة هي تلك الحالة التي يبيع فيها عدد قليل من المنتجين (أكثر من واحد) سلعًا متجانسة (حالة احتكار القلة المتجانس)، أو سلعًا غير متجانسة (حالة احتكار القلة غير المتجانس).

وإذا كان هناك بائعان فقط سمي الاحتكار بالاحتكار المزدوج، وفي هذه الحالة يتقاسم المنتجان السوق، ويراعى كل منهما تصرفات الآخر، ويتفاعل مع هذه التصرفات بردٍّ فعل مناسب.

فلو افترضنا أن هناك احتكارًا مزدوجًا بين محتكرين ا، ب وأن المحتكر ا، ينتج كمية تساوي q_1 بينما ينتج المحتكر الآخر كمية تساوي q_2، فإن الطلب الكلي يساوي :

$$q = q_1 + q_2$$

ولو افترضنا أن تكلفة المحتكر ا تساوي C_1، وأن تكلفة المحتكر ب تساوي C_2، فإن دوال التكاليف تكون

$$C_1 = \phi\,(q_1)$$
$$C_2 = \psi\,(q_2)$$

وإذا كانت Π_1، Π_2 تمثِّل أرباح المحتكرين ا، ب على التوالي، وبافتراض أن السلعة متجانسة، فإن السعر الذي يبيع به كل منهما إنتاجه لابد وأن يكون متساويًا ولنفترض أنه p.

وبناءً على ذلك فإن p يكون دالة للطلب الكلي أو:

$$p = f(q)$$

وتصبح المشكلة تحديد مستوى إنتاج كل محتكر الذي يحق له أقصى ربح ممكن، لكن الربح في كل حالة يكون دالة للكمية المباعة أو:

$$\Pi_1 = g\,(q_1)$$
$$\Pi_2 = h\,(q_2)$$

وهكـذا يحاول المحتكـر الأول أن يحقق القيمـة القصوى للربحية التي تمثلها المعادلة التالية:

$$\Pi_1\,(q_1) = pq_1 - C\,(q_1)$$

إلا أن هذا سوف يتوقف على رد فعل المحتكر الثاني للتغيّر في الكمية q_1 ؛ أي أن مستوى إنتاج المحتكر الأول الذي يحقق له أقصى ربح ممكن يتوقف على:

$$\frac{dq_2}{dq_1}$$

ويعرف هذا المعدّل بمعدّل التغيّر الظنّي أو التخميني ويمكننا أن نميِّز بين حالتين:

$$\frac{dq_2}{dq_1} = 0 \qquad \text{(i)}$$

$$\frac{dq_2}{dq_1} \neq 0 \qquad \text{(ii)}$$

(٥ ـ ٣ ـ ١) حالة معدّل التغيّر الظنّي يساوي صفرًا

لكي يحقق المنتج الأول أقصى ربح ممكن فإن الشرط الأساس للتوازن يتطلب:

$$\frac{d}{dq_1}[\,pq_1 - C\,(q)\,] = 0$$

حيث إن:

$$\begin{aligned} pq_1 &= q_1 f(q) \\ &= q_1 f(q_1 + q_2) \end{aligned}$$

وهكذا:

$$\frac{d}{dq_1}[\,q_1 f(q_1+q_2)-C(q_1)\,] = 0$$

أي أن:

$$q_1\frac{d}{dq_1}f(q_1+q_2)+f(q_1+q_2)\frac{dq_1}{dq_1}-\frac{d}{dq_1}C(q_1) = 0$$

$$q_1 f'(q_1+q_2)\frac{d}{dq_1}(q_1+q_2)+f(q_1+q_2)=\frac{d}{dq_1}C(q_1)$$

$$q_1 f'(q)\left[\frac{dq_1}{dq_1}+\frac{dq_2}{dq_1}\right]+f(q_1+q_2)=MC_1$$

وهكذا:

$$q_1 f'(q)[1+0]+f(q)=MC_1$$

$$q_1 f'(q)+f(q)=MC_1$$

أما المحتكر الثاني فإنه يحقق أقصى ربح ممكن عندما:

$$q_2 f'(q)+f(q)=MC_2$$

ومن هاتين المعادلتين الأخيرتين يمكننا أن نحصل على q_1 كدالة للمتغيّر q_2 أو:

$$q_1=\phi_1(q_2)$$

$$q_2=\phi_2(q_1)$$

وتعرف هاتان المعادلتان بمنحنيات ردِّ الفعل، ويتوقف شكل هذه المنحنيات على دوال التكاليف.

ويمكن تحديد إنتاج المحتكرين بسهولة، فإذا عرَّفنا مقدار q_2، أصبح من السهولة تحديد مستوى إنتاج المحتكر الأول طبقًا للدالة $\phi_1(q_2)$، وإذا تحدد مستوى الإنتاج q_1 استطاع المحتكر الثاني أن يحدد إنتاجه من الدالة $\phi_2(q_1)$.

أما الشرط الكافي للتوازن فيتطلب :

$$\frac{d}{dq_1}(MC_1) > \frac{d}{dq_1}(MR_1)$$

$$\frac{d}{dq_2}(MC_2) > \frac{d}{dq_2}(MR_2)$$

(٥ ـ ٣ ـ ٢) حالة معدّل التغيّر الظنّي لا يساوي صفرًا

في هذه الحالة نحصل على :

$$\frac{dq_1}{dq_2} \neq 0$$

وكذلك :

$$\frac{dq_2}{dq_1} \neq 0$$

وعندما يحقّق المحتكر الأول أقصى ربح ممكن نحصل على :

$$\frac{d}{dq_1}\left[q_1 f(q_1 + q_2) - C_1(q_1) \right] = 0$$

ومن هذه المعادلة نحصل على :

$$q_1 f'(q)\left[1 + \frac{dq_2}{dq_1} \right] + f(q) = MC_1$$

وعندما يحقّق المحتكر الثاني أقصى ربح له نحصل على :

$$\frac{d}{dq_2}\left[q_2 f(q_1 + q_2) - C_2(q_2) \right] = 0$$

ومنها نحصل على :

$$q_2 f'(q)\left[1+\frac{dq_1}{dq_2}\right]+f(q)=MC_2$$

ويمكن استخدام هذه النتائج بالطريقة نفسها لاشتقاق منحنيات رد الفعل، ولكي نحصل على توازن مستقر، يجب أن يكون منحنيا رد الفعل للمحتكرين منحدرين إلى أسفل وذوي ميل يقل عن واحد صحيح .

ويمكن توضيح توازن المحتكر في سوق القلة باستخدام المثالين الآتيين :

مثال

نفترض أن هناك محتكرين وأن دالة تكاليفهما هي :

$$C_1 = q_1^2 + 8q_1 + 8$$
$$C_2 = 0.625\, q_2^2 + 5q_2 + 5$$

ونفترض أن دالة الطلب على السلعة التي يبيعانها :

$$q = 200 - 10p$$

حيث تمثل q الكمية المطلوبة، p السعر. هذا وسوف نفترض أن المحتكرين يبيعان سلعتهما بالسعر نفسه ؛ أي أننا سوف نفترض احتكارًا متجانسًا .

وبافتراض أن معدّل التغيّر الظنّي يساوي صفرًا يمكننا حساب :

$$MC_1 = 2q_1 + 8$$
$$MC_2 = 1.25q_2 + 5$$

ومن دالة الطلب نحصل على :

$$f(q) = p = \frac{200 - q}{10}$$
$$= 20 - 0.1q_1 - 0.1q_2$$

وحيث إن تحقيق أقصى ربح ممكن يتطلب:

$$q_1 f'(q) + f(q) = MC_1$$
$$q_2 f'(q) + f(q) = MC_2$$

وبناءً على ذلك فإنه عند التوازن نحصل على:

$$-0.1q_1 + 20 - 0.1q_1 - 0.1q_2 = 2q_1 + 8$$
$$-0.1q_2 + 20 - 0.1q_1 - 0.1q_2 = 1.25q_2 + 5$$

ويمكن استنتاج منحنيات ردِّ الفعل الآتية من المعادلتين أعلاه:

$$q_1 = \frac{120 - q_2}{22}$$

$$q_2 = \frac{1500 - 10q_1}{145}$$

وبحلِّ هاتين المعادلتين آنيًا نحصل على:

$$q_1 = 5; q_2 = 10$$

أي أن المحتكر الأول يحقِّق أقصى ربح ممكن عندما ينتج 5 وحدات، بينما يحقِّق المحتكر الثاني أقصى ربح ممكن عندما ينتج 10 وحدات، وسوف يتحدد السعر التوازني عند 18.5. ويمكن بسهولة التأكد من تحقيق الشرط الكافي للتوازن عند الكميات المذكورة.

مثال

نفترض أن دالة التكاليف هي:

$$C(q) = Aq^2 + Bq + F$$

حيث q تمثِّل الكمية المنتجة، ونفترض أن دالة الطلب هي:

$$q = ap + b$$

حيث p ثمن الوحدة المباعة.

لنفترض أن هناك محتكرين يقومان بإنتاج كميات q_1 ، q_2 بالتكلفة المذكورة نفسها، وإن كلًّا منهما يحاول تحقيق أقصى ربح ممكن، والمطلوب تحديد الكميات التي يجب أن ينتجها كل منهما، والسعر الذي يجب أن يبيعا به حتى يحققا هدفهما.

يمكن التعبير عن ربح المحتكرين كالآتي:

$$\Pi_1 = pq_1 - C(q_1)$$
$$\Pi_2 = pq_2 - C(q_2)$$

حيث:

$$q = q_1 + q_2 = ap + b$$

يمكننا أن نميِّز بين أربع حالات:

١ - *كل محتكر يحاول أن يعظِّم ربحه بافتراض أن إنتاج المحتكر الآخر مستقلًّا عن إنتاجه*

ومعنى ذلك رياضيًّا أن:

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial q_1} = 0 \; ; \; \frac{\partial \Pi_2}{\partial q_2} = 0$$

وأن

$$\frac{\partial q_1}{dq_2} = 0 \; ; \; \frac{\partial q_2}{dq_1} = 0$$

وبتفاضل المعادلات:

$$\Pi_1 = pq_1 - C(q_1)$$
$$\Pi_2 = pq_2 - C(q_2)$$

نحصل على:

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial q_1} = p + q_1 \frac{\partial p}{\partial q_1} - C'(q_1) = 0$$

$$\frac{\partial \Pi_2}{\partial q_2} = p + q_2 \frac{\partial p}{\partial q_2} - C'(q_2) = 0$$

لكن من المعادلة

$$q = ap + b$$

$$\frac{\partial p}{\partial q_1} = \frac{\partial p}{\partial q_2} = \frac{1}{a}$$

ومن المعادلة :

$$C(q) = Aq^2 + Bq + F$$

$$C'(q) = 2Aq + B$$

وهكذا

$$p + \frac{q_1}{a} - 2A\, q_1 - B = 0$$

$$p + \frac{q_2}{a} - 2A\, q_2 - B = 0$$

وبتعويض $q = q_1 + q_2$ نحصل على :

$$p = \frac{b - 2Aab - 2Ba}{-a\,(3 - 2\,Aa)}$$

وهو سعر التوازن .

وأيضًا نحصل على :

$$q_1 = q_2 = \frac{b + Ba}{3 - 2\,Aa}$$

وهي كميات الإنتاج التي تحقّق التوازن لكل من المحتكرين، ويلاحظ أنها متساوية.

٢ ـ *يحاول كل محتكر أن ينتج كمية من السلعة بحيث تحقق الصناعة أكبر ربح ممكن*

يكون مجمل ربح الصناعة مساويًا:

$$\Pi = (q_1 + q_2)\, p - C(q_1) - C(q_2)$$

وعند التوازن نحصل على:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = \frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = 0$$

أو

$$p + (q_1 + q_2)\frac{\partial p}{\partial q_i} - 2\,Aq_i - B = 0$$

أو

$$p + \frac{a\,p + b}{a} - 2\,Aq_i - B = 0$$

حيث $i = 1, 2$.

وبالتعويض عن

$$q = q_1 + q_2 = ap + b$$

نحصل على:

$$p = \frac{2b - 2\,A\,ab - 2\,Ba}{-a\,(4 - 2\,Aa)}$$

وكذلك

$$q_1 = q_2 = \frac{b + Ba}{4 - 2\,Aa}$$

وتعرف هذه الحالة بظاهرة التعاون .

٣ ـ *يحاول كل منتج أن يحدد مستوى الإنتاج الذي يحقق له أقصى ربح ممكن* في هذه الحالة :

$$\Pi = pq - C(q)$$

وعند التوازن :

$$\frac{d\Pi}{dq} = 0$$

أي أن :

$$p + \frac{q}{a} - 2Aq - B = 0$$

ومن ثم :

$$p = \frac{b - 2Aab - Ba}{-a(2 - 2Aa)}$$

$$q = \frac{b + Ba}{2 - 2aA}$$

٤ ـ *يعتبر كل محتكر الثمن محددًا ويحاول أن يحقق أقصى ربح ممكن* في هذه الحالة :

$$\left(\frac{\partial \Pi_1}{\partial q_1}\right)_{p = const.} = 0$$

أي أن الثمن p يعتبر ثابتًا وكذلك

$$\left(\frac{\partial \Pi_2}{\partial q_2}\right)_{p = const.} = 0$$

وبالتعويض نحصل على:

$$p - C'(q_1) = 0$$
$$p - C'(q_2) = 0$$

أي أن:

$$p = 2Aq_1 + B = 2Aq_2 + B$$

وبالتعويض من المعادلة:

$$q = q_1 + q_2 = \alpha p + b$$

نحصل على:

$$p = \frac{Ab + B}{1 - Aa}$$

$$q_1 = q_2 = \frac{b + Ba}{2 - 2Aa}$$

(٥ ـ ٤) البرمجة الخطّية وتوازن المنشأة

سبق أن رأينا كيف يستخدم التحليل الحدِّي الذي يعتمد على حساب التفاضل في حلِّ مشكلة المنشأة، إلا أن ذلك التحليل يناسب دوال الإنتاج التي تتمتع بخاصية الاستمرارية، وتكون محدبة، ويمكن حساب معاملات تفاضلها الجزئية من الدرجة الأولى والثانية؛ فعندما تتوافر هذه الشروط يمكننا استخدام طريقة لاجرانج في تعظيم ربحية المنشأة مع مراعاة شروط القيد التي تحددها دالة الإنتاج [العيسوي، ١٩٨٢م].

ويلاحظ أن التحليل الحدِّي لايتعرض للمشكلات الفنية التي تواجه المنشأة، فحل هذه المشكلات قد ينتج عنه دالة لاتتصف بالصفات المطلوبة لإجراء التحليل الحدِّي، فإذا حدث ذلك فإنه يمكننا استخدام أسلوب البرمجة الخطّية في تحديد التنظيم

الفني الأمثل للنشاط الصناعي للمنشأة، وفي الوقت نفسه تحديد كميات السلع الواجب إنتاجها لتحقيق أقصى ربح ممكن [Naylor, 1969].

وهكذا فإن أسلوب البرمجة الخطّية يعطي معلومات أكثر مما يعطيه الأسلوب الحدِّي ؛ إذ يمكننا من تحديد التجميع الأمثل لعناصر الإنتاج والمنتجات حيث يؤكد على نوع النشاط بدلاً من كميات الإنتاج أو وحدات عناصر الإنتاج اللازمة لتحقيق أقصى ربح ممكن [McKenna, 1974 and Metwally, 1981].

إلا أن هناك اختلافات واضحة بين الأسلوب الحدِّي وأسلوب البرمجة الخطِّية، وتنحصر هذه الاختلافات في الافتراضات التي يقوم عليها كل منهما ومضمون شروط التوازن المتحققة طبقًا للأسلوبين.

(٥ ـ ٤ ـ ١) البرمجة الخطّية والتجميع الأمثل لعناصر الإنتاج

تستطيع المنشأة أن تنتج السلعة المعيَّنة باستخدام أساليب إنتاج مختلفة ؛ أي باستخدام تجميع مختلف لعناصر الإنتاج ؛ فإحدى طرق الإنتاج مثلاً قد تعتمد أكثر على عنصر العمل ؛ أي تكون ذات كثافة عمالية أكبر، بينما قد تستخدم طريقة أخرى رأس المال بنسبة أكبر. وتصبح مشكلة المنشأة إيجاد التجميع الأمثل أو أسلوب الإنتاج الأمثل، وبمعنى آخر يصبح السؤال: كم وحدة يتعينَّ إنتاجها باستخدام الأساليب الإنتاجية المختلفة حتى تحقق المنشأة أقصى ربح ممكن؟ وسوف نوضِّح بالمثال كيف يمكن استخدام البرمجة الخطّية في الإجابة على هذا السؤال.

لنفترض أن منشأة ما يمكنها إنتاج سلعة ما باستخدام ثلاثة أساليب هي : A, B, C ، ولكي تستخدم المنشأة الأسلوب A في إنتاج وحدة واحدة من السلعة فإنه يتعين عليها أن تستخدم الآلة W لمدة ساعة واحدة والآلة Y لمدة سبع ساعات والآلة Z لمدة ثلاث ساعات.

ولكي تستخدم المنشأة الأسلوب B في إنتاج وحدة واحدة من السلعة فإنه يتعينَّ عليها أن تستخدم الآلة W لمدة ساعة واحدة، والآلة Y لمدة خمس ساعات، والآلة Z لمدة خمس ساعات.

ولكي تستخدم المنشأة أسلوب الإنتاج C لإنتاج وحدة واحدة من السلعة نفسها فإن ذلك يتطلب استخدام الآلة W لمدة ساعة واحدة، والآلة Y لمدة ثلاث ساعات، والآلة Z لمدة عشر ساعات.

إلا أن هناك طاقات محددة لاستخدام الآلات، فيمكن استخدام الآلة W لمدة خمس عشرة ساعة على الأكثر، ويمكن استخدام كل من الآلتين Y, Z بحد أقصى مائة ساعة.

ولنفترض أن التكلفة المتغيّرة لإنتاج وحدة واحدة باستخدام الأسلوب A تساوي 7 وأن التكلفة المتغيّرة لإنتاج وحدة باستخدام الأسلوبين C, B تساوي 8 ، 10 على التوالي.

فإذا كانت المنشأة تبيع الوحدة المنتجة من السلعة بمقدار 15 ، والمطلوب تحديد الكميات من السلعة التي يجب إنتاجها باستخدام كل من الأساليب الثلاثة A, B, C حتى تحقق المنشأة أكبر ربح ممكن.

ويتضح من تكلفة الإنتاج وسعر البيع أن ربح المنشأة من الوحدة التي تنتج باستخدام الأسلوب A تساوي 8 ، بينما الربح من كل وحدة تنتج باستخدام الأسلوبين C, B هي 7 ، 5 على التوالي، وهكذا يمكن صياغة مشكلة المنشأة رياضيًا كالآتي:

المطلوب تعظيم الدالة

$$Z = 8x_1 + 7x_2 + 5x_3$$

مع مراعاة

طاقة الآلة W:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 15$$

طاقة الآلة Y:

$$7x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leqslant 100$$

طاقة الآلة Z:

$$3x_1 + 5x_2 + 10x_3 \leqslant 100$$
$$x_1, x_2, x_3 \geqslant 0$$

يلاحظ على هذه القيود أن كل عمود يشير إلى أسلوب إنتاج السلعة ؛ فالعمود الأول يشير إلى الأسلوب A (ساعة على الآلة W ، سبع ساعات على الآلة Y ، ثلاث ساعات على الآلة Z). أما كل صف في شروط القيد فيشير إلى الطاقة القصوى لاستخدام الآلة المعيَّنة في إنتاج الوحدات كلها خلال الفترة الزمنية المعيَّنة [Boulding and Spivey, 1960].

وتعتبر المشكلة أعلاه مشكلة عادية من مشكلات البرمجة الخطّية ، ويمكن حلها باستخدام طرق البرمجة الخطّية المعروفة ؛ ومن ثم نستطيع إعادة كتابة المشكلة كالآتي :

المطلوب تعظيم :

$$Z = 8x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$$

مع مراعاة أن :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$$
$$7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + x_5 = 100$$
$$3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + x_6 = 100$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geqslant 0$$

حيث : x_4, x_5, x_6 تمثّل متغيّرات مسترضاة .

وباستخدام طريقة السمبكلس نحصل على الحل الموضح بالجدول الآتي :

جدول رقم (٥ ـ ١)

الأساس (١)

C_j		8	7	5	0	0	0	
C_b	**Basis**	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	r
0	x_4	1	1	1	1	0	0	15
0	x_5	7	5	3	0	1	0	100
0	x_6	3	5	10	0	0	1	100
Z_j		0	0	0	0	0	0	0
$C_j - Z_j$		8	7	5	0	0	0	

الأساس (٢)

8	x_1	1	5/7	3/7	0	1/7	0	100/7
0	x_4	0	2/7	4/7	1	–1/7	0	5/7
0	x_6	0	20/7	61/7	0	–3/7	1	400/7
Z_j		8	40/7	24/7	0	8/7	0	800/7
$C_j - Z_j$		0	9/7	11/7	0	–8/7	0	

تابع جدول رقم (٥ - ١)

8	x_1	1	1/2	0	–3/4	1/4	0	55/4
5	x_3	0	1/2	1	7/4	–1/4	0	5/4
0	x_6	0	3/2	0	–61/4	7/4	1	185/4
Z_j		8	6½	5	23/4	3/4	0	465/4
$C_j - Z_j$		0	1/2	0	–23/4	–3/4	0	

الأساس (٤)

C_j		3	4	0	0	
C_b	Basis	x_1	x_2	x_3	x_4	r
0	x_3	2	3/2	1	0	12
0	x_4	4/3	2	0	1	12
Z_j		0	0	0	0	0
$C_j - Z_j$		3	4	0	0	

ويتضح من الحل أعلاه أن المنشأة تحقق أقصى ربح ممكن عندما ينتج $12\frac{1}{2}$ وحدة باستخدام الأسلوب A وعدد $2\frac{1}{2}$ وحدة باستخدام الأسلوب B دون إنتاج أي شيء باستخدام الأسلوب C ، وفي هذه الحالة تحقق المنشأة أقصى ربح ممكن ويكون ربحها

الكلي مساويًا :

$$Z = 8\left(12\frac{1}{2}\right) + 7\left(2\frac{1}{2}\right) + 10\,(0) = 117.5$$

(٥ ـ ٤ ـ ٢) البرمجة الخطّية والتجميع الأمثل للمنتجات

لنفترض أن هناك منشأة تنتج نوعين من الصابون: صابون وجه (T) وصابون غسيل (S) ، ولنفترض أن الإنتاج يتم باستخدام آلتين كما في الجدول الآتي:

أسلوب الإنتاج

الســاعــات	الماكينة ١	الماكينة ٢
عدد الساعات اللازمة لإنتاج وحدة (مائة كيلو) من T	2	4/3
عدد الساعات اللازمة لإنتاج وحدة (مائة كيلو) من S	3/2	2
الطاقة القصوى لاستخدام الماكينات (ساعات يومية)	12	12

ولنفترض أن المنشأة تعمل في ظل المنافسة الكاملة، وأنها تحقق ربحًا قدره 3 على كل وحدة تباع من T وربحًا قدره 4 على كل وحدة تباع من S ، والمطلوب تحديد عدد وحدات T ، S التي يجب إنتاجها حتى تحقق المنشأة أقصى ربح ممكن.

نفترض أن عدد الوحدات المنتجة من T يساوي x_1 ، وأن عدد الوحدات المنتجة من S يساوي x_2 فتصبح المشكلة تعظيم:

$$Z = 3x_1 + 4x_2$$

مع مراعاة أن:

$$2x_1 + (3/2)x_2 \leqslant 12$$

$$(4/3)x_1 + 2x_2 \leqslant 12$$

$$x_1, x_2 \geqslant 0$$

ويمكن إعادة صياغة هذه المشكلة باستخدام أسلوب البرمجة الخطّية كالآتي :

المطلوب تعظيم :

$$Z = 3x_1 + 4x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

مع مراعاة أن :

$$2x_1 + (3/2)x_2 + x_3 = 12$$

$$(4/3)x_1 + 2x_2 + x_4 = 12$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geqslant 0$$

ويعطي الجدول الآتي حل المشكلة باستخدام طريقة السمبلكس، ويتضح من الحل أن المنشأة تحقق أقصى ربح ممكن إذا أنتجت ثلاث وحدات من نوع T ، وأنتجت أربع وحدات من نوع S ، ويكون الربح مساويًا :

$$Z = 3\,(3) + 4\,(4) = 25$$

جدول رقم (٥ ـ ٢)
الأساس الأول

C_j		3	4	0	0	
C_b	Basis	x_1	x_2	x_3	x_4	r
0	x_3	2	3/2	1	0	12
0	x_4	4/3	2	0	1	12
Z_j		0	0	0	0	0
$C_j - Z_j$		3	4	0	0	

الأساس الثاني

4	x_2	2/3	1	0	1/2	6
0	x_3	1	0	1	−3/4	3
C_j		8/3	4	0	2	24
$C_j - Z_j$		1/3	0	0	−2	

الأساس الثالث

3	x_1	1	0	1	−3/4	3
4	x_2	0	1	−2/3	1	4
Z_j		3	4	1/3	7/4	25
$C_j - Z_j$		0	0	−1/3	−7/4	

(٥ ـ ٤ ـ ٣) أسلوب التحليل الحدِّي وأسلوب البرمجة الخطّية

يتضح أن أسلوب البرمجة الخطّية يكون أكثر ملاءمة في تلك الحالات التي تكون فيها المواصفات اللازمة لإجراء التحليل الحدِّي غير متوافرة في دالة الإنتاج.

وعند تطبيق أسلوب البرمجة الخطّية على المنشأة نفترض أن للمنشأة عددًا من النشاطات، وأن كل نشاط مقيد بعدد من القيود، وأن هذه القيود دوال تأخذ شكل المتساويات أو المتباينات؛ إلا أننا نفترض أن هذه الدوال (على الأقل بالتقريب) خطية؛ ومن ثم فإن شرط القيد ز يمكن صياغته كالآتي:

$$a_{ij} x_1 + a_{2j} x_2 + \dots + a_{nj} x_j = r_j$$

ويمكن صياغة الشروط كافة كالآتي:

$$Ax = A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n = r$$

وذلك باستخدام المصفوفات، حيث x تمثّل متجه النشاطات، ويوضّح جميع النشاطات المتوافرة للمنشأة حيث:

$$x \geqslant 0$$

ويكون المتجه ممكنًا إذا كانت:

$$x \geqslant 0$$

$$Ax = r$$

وتحاول المنشأة أن تختار بين المتجهات الممكنة لتحقيق دالة الهدف.

ولنفترض أيضًا أن دالة الربح خطّية في مستويات النشاطات أو

$$Z = C_1 x_1 + C_2 x_2 + \dots + C_n x_n$$

حيث C_j تمثّل مساهمة الوحدة من النشاط i في ربحية المنشأة، وحيث C يمثل متجه المساهمات، وتحاول المنشأة أن تختار النشاطات التي تحقق أقصى ربح ممكن، ويتطلب ذلك:

(أ) ألا يزيد عدد النشاطات على القيود التي تحد نشاط المنشأة.

(ب) ألا يستبعد نشاط يكون أكثر ربحية من التجميع المعادل في النشاطات المقبولة.

وهاتان القاعدتان تقابلان قاعدة تساوي نسبة الإنتاجية الحدِّية والأثمان في التحليل الحدِّي.

(٥ ـ ٥) شروط كيون تاكر وتوازن المنشأة

تستخدم شروط Kuhn-Tucker في تحقيق الهدف الأمثل عندما تكون الدوال مقيدة بمعادلات ومتباينات ومن ثم فإنها تستخدم في حلِّ مشكلة من النوع الآتي وهي

تعظيم الدالة :

$$\phi = \phi\,(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

مع مراعاة أن :

$$H_i\,(x_1, \ldots, x_n) \leqslant 0; \; i = 1, \ldots, m$$

وحتى يمكن استخدام الشروط في حلِّ هذه المشكلة لابد من افتراض أن دالة الهدف ϕ والقيود H_i محدبة (أي مقعرة من أسفل)، وقابلة للتفاضل .

لاستخدام شروط Kuhn-Tucker نبدأ بتكوين دالة لاجرانج :

$$L = \phi\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i H_i\,(x_1, \ldots, x_n)$$

وحيث

$$x_j \geqslant 0; \; \lambda_i \geqslant 0$$
$$(j = 1, \ldots, n; \; i = 1, \ldots, m)$$

وحتى تتحقق نهاية عظمى فإنه يكون ضروريًا أن تتحقق الشروط الآتية :

$$\left.\frac{\partial L}{\partial x_j}\right|_{x_j = \bar{x}_j} \leqslant 0 ; \quad j=1 ,\ldots, n \qquad \text{(i)}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left.\frac{\partial L}{\partial x_j}\right|_{x_j = \bar{x}_j} . \; \bar{x}_j = 0 \qquad \text{(ii)}$$

$$\bar{x}_j \; \geqslant \; 0 \, ; \, j = 1 ,\ldots, n \qquad \text{(iii)}$$

$$\left.\frac{\partial L}{\partial \lambda_i}\right|_{\lambda_i = \bar{\lambda}_i} \geqslant 0 ; \quad i = 1 ,\ldots, m \qquad \text{(iv)}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \left.\frac{\partial L}{\partial \lambda_i}\right|_{\lambda_i = \bar{\lambda}_i} . \; \bar{\lambda}_i = 0 \qquad \text{(v)}$$

$$\bar{\lambda}_i \geqslant 0; i = 1, \ldots, m \qquad \text{(vi)}$$

حيث (-) فوق المُتغير تشير إلى قيمته في حالة توازن.

فيتضح أن المتباينة (i) تتحقق عندما $\bar{x} = 0$ كما أن المتباينة (ii) تتحقق عندما $\bar{\lambda} = 0$.

أما شروط كيون تاكر الضرورية لتحقيق نهاية صغرى فهي :

$$\left. \frac{\partial L}{\partial x_j} \right|_{x_j = \bar{x}_j} \geqslant 0 ; \quad j = 1 ,\ldots, n \qquad (1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \left. \frac{\partial L}{\partial x_j} \right|_{x_j = \bar{x}_j} . \bar{x}_j = 0 \qquad (2)$$

$$\bar{x}_j \geqslant 0 ; j = 1 ,\ldots, n \qquad (3)$$

$$\left. \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} \right|_{\lambda_i = \bar{\lambda}_i} \geqslant 0 ; \quad i = 1 ,\ldots, m \qquad (4)$$

$$\sum_{i=1}^{m} \left. \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} \right|_{\lambda_i = \bar{\lambda}_i} . \bar{\lambda}_i = 0 \qquad (5)$$

$$\bar{\lambda}_i \geqslant 0 ; i = 1 ,\ldots, m \qquad (6)$$

ونوضِّح الآن كيف نستخدم شروط كيون تاكر في تحقيق توازن المنشأة :

نفترض أن منشأة ما تستخدم عدد m من عناصر الإنتاج المتغيِّرة وعدد n من عناصر الإنتاج الثابتة لإنتاج عدد p من الوحدات حيث :

x_{ik} = عدد وحدات العنصر المتغيِّر i المستخدمة في إنتاج المنتج k $(i = 1, \ldots, m; k = 1, \ldots, p)$

y_{jk} = عدد وحدات العنصر الثابت j المستخدمة في إنتاج المنتج k ($j = 1, \ldots, n$)

z_k = كميات المنتج k

y_j = كميات العنصر الثابت j المتوافرة للمنشأة

فتصبح دالة إنتاج المنشأة مساوية:

$$Q(z_1, \ldots, z_p; x_{11}, \ldots, x_{mp}; y_{11}, \ldots, y_{np}) = 0$$

ويلاحظ أن عدد وحدات العنصر الثابت j المستخدمة في الإنتاج لايمكن أن تزيد على المتوافر من هذا العنصر أو:

$$\sum_{k=1}^{p} y_{jk} \leqslant y_j \;;\; j = 1, \ldots, n$$

فلو رمزنا لدالة الإيراد الكلي بالرمز R ، ولدالة التكاليف المتغيّرة بالرمز C فإن:

$$R = R(z_1, \ldots, z_p)$$

$$C = C(x_{11}, \ldots, x_{mp})$$

ويلاحظ أن تحويل عنصر إنتاج ثابت من إنتاج منتج معيّن إلى إنتاج منتج آخر سوف يكلّف المنشأة بنوع من التكاليف لايقع في مجال التكاليف الثابتة أو المتغيّرة، وإنما تكاليف تتغيَّر فقط بتغيّر خليط الإنتاج، ويمكن التعبير عن تكاليف التحويل هذه بالمعادلة:

$$K = K(y_{11}, \ldots, y_{np})$$

ويعبِّر معامل التفاضل الجزئي ($\partial K / \partial y_{jk}$) عن تكلفة تحويل مقدار صغير من العنصر الثابت j لإنتاج المنتج k ، حيث ($\partial K / \partial y_{jk} > 0$).

هذا ونفترض أن F تمثّل التكاليف الثابتة غير K ، وفي هذه الحالة يكون ربح المنشأة مساويًا:

$$\pi = R - C - K - F$$

ويكـون هدف المنشأة أن تصل بهذا الربح إلى أقصى درجة ممكنة مع مراعاة القيود المعطاة بدالة الإنتاج وطاقة المنشأة على استخدام العناصر الثابتة.

وهنا نلاحظ أن تطبيق دالة لاجرانج التقليدية لايصلح لحلّ هذه المشكلة؛ حيث إن من متطلبات الحل أن تكون قيم المتغيّرات عند التوازن غير سالبة وأن يراعى القيمة:

$$\sum y_{jk} \leqslant y_i$$

وهو قيد يختلف عن قيود المساواة التي تعودنا عليها.

من أجل ذلك نستعين بشروط كيون تاكر، وعند استخدام هذه الشروط نقوم أولاً ببناء دالة لاجرانج فنحصل على:

$$L = R - C - k - F + \lambda Q + \sum_{j=1}^{n} u_j \left(y_j - \sum_{k=1}^{p} y_{jk} \right)$$

حيث كل من λ ، u_j تمثّل مضاعفات لاجرانج.

لتحقيق التوازن لابد من توافر شروط كيون تاكر الآتية:

$$\frac{\partial L}{\partial Z_k} = \frac{\partial R}{\partial Z_k} + \lambda \frac{\partial Q}{\partial Z_k} \leqslant 0 \qquad (k = 1, \ldots, p)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_{ik}} = - \frac{\partial C}{\partial x_{ik}} + \lambda \frac{\partial Q}{\partial x_{ik}} \leqslant 0 \qquad (i = 1, \ldots, m ; k = 1, \ldots, p)$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_{jk}} = - \frac{\partial K}{\partial y_{jk}} + \lambda \frac{\partial Q}{\partial y_{jk}} - u_j \leqslant 0 \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

$$\sum_{k=1}^{p} \left(\frac{\partial R}{\partial Z_k} + \lambda \frac{\partial Q}{\partial Z_k} \right) \bar{Z}_k + \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{p} \left(- \frac{\partial C}{\partial x_{ik}} + \lambda \frac{\partial Q}{\partial x_{ik}} \right) \bar{x}_{ik}$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} \left(-\frac{\partial k}{\partial y_{jk}} + \lambda \frac{\partial Q}{\partial y_{jk}} - u_j \right) \bar{y}_{jk} = 0$$

$$\bar{z}_k \geqslant 0 \; (k = 1, \dots, p)$$
$$\bar{x}_{ik} \geqslant 0 \; (i = 1, \dots, m; k = 1, \dots, p)$$
$$\bar{y}_{jk} \geqslant 0 \; (j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, p)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = Q > 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_j} = y_j - \sum_{k=1}^{p} y_{jk} \geqslant 0 \qquad (j=1, \dots, n)$$

$$\sum_{k=1}^{p} y_{ik} \leqslant y_j \qquad (j=1, \dots, n)$$

$$Q\bar{\lambda} + \sum \left(y_j - \sum_{k=1}^{p} y_{jk} \right) \bar{u}_j = 0$$

$$\bar{\lambda} \geqslant 0$$
$$\bar{u}_j \geqslant 0$$

ويمكن تفسير λ على أنه ثمن ظل للإنتاج Q ، أما u_j فإنها تشير إلى قيم عوامل الإنتاج الثابتة التي تستخدمها المنشأة؛ أي تمثِّل تكلفة الفرصة البديلة المتصلة بالمتغيّرات الثابتة.

أما الشرط الأول من شروط كيون تاكر أعلاه فيمكن كتابته كالآتي :

$$\frac{\partial R}{\partial Z_k} \leqslant -\lambda \frac{\partial Q}{\partial Z_k}$$

وتفيد هذه المعادلة أن الإيراد الحدِّي (أو الثمن في حالة المنافسة الكاملة) للمنتج k لابد أن يكون أقل أو مساويًا للتكلفة الحدِّية المحسوبة للمنتج k ؛ وإذا تحققت المساواة في المعادلة أعلاه فإن هذا يعني أن المنتج يتحقق إنتاجه عند المستوى الأمثل ؛ فإذا تحققت المساواة لكل k فإنه بالنسبة لأي سلعتين a, b نحصل على :

$$\frac{MR_a}{MR_b} = - \frac{\partial Z_b}{\partial Z_a}$$

أي أن نسبة الإيرادات الحدِّية تتساوى عن التوازن مع معامل التحويل الإنتاجي بين المتغيرين .

أما إذا تحققت المتباينة بدلاً من المساواة فإن المنشأة التي تحقق أقصى ربح ممكن لن تقوم بإنتاج السلعة k ؛ لأن التكلفة الحدِّية سوف تفوق الإيراد الحدِّي .

أما الشرط الثاني من شروط كيون تاكر فيمكن إعادة كتابته كالآتي :

$$\frac{\partial C}{\partial x_{ik}} \geqslant \lambda \frac{\partial Q}{\partial x_{ik}}$$

أي أن تكلفة عنصر الإنتاج الحدِّية (أو ثمن عنصر الإنتاج في حالة المنافسة الكاملة) لعنصر الإنتاج المتغيرالمستخدم في إنتاج المنتج k لابد أن تكون أكبر من القيمة الحدِّية المحسوبة أو مساوية لها لاستخدام وحدة من المتغيّر التابع i في إنتاج المنتج k ؛ فإذا تحققت المساواة في المعادلة الأخيرة فإن الاستخدام الأمثل للمتغير التابع i يتحقق بالنسبة للمنتج k ؛ : وإذا تحققت المساواة بالنسبة لكل العناصر المتغيّرة لمنتج معين k فإنه بالنسبة لأي عنصرين a, b تتحقق المعادلة :

$$\frac{MFC_a}{MFC_b} = - \frac{\partial x_{bk}}{\partial x_{ak}}$$

وطبقًا لهذه المعادلة فإنه عندما تستخدم الكميات المثلى من العنصرين a, b في إنتاج السلعة k فإن نسبة تكلفة العناصر الحدِّية للمتغيّرين تتساوى مع معدّل الإحلال الحدِّي بين المتغيّرين.

أما إذا تحققت المتباينة في المعادلة أعلاه فإن المنشأة التي تحقق أقصى ربح ممكن لن تستخدم العنصر المتغير i في إنتاج السلعة k لأن التكلفة الحدِّية لهذا العنصر سوف تفوق الإيراد الحدِّي الناتج عن استخدام هذا العنصر.

وإذا تحققت المساواة لكل من i ، k فإنه بالنسبة لأي عنصر إنتاج متغير a وأي سلعة b نحصل على:

$$MFC_{ab} = MR_b \frac{\partial Z_b}{\partial x_{ab}}$$

حيث MFC_{ab} تشير إلى التكلفة الحدِّية لمتغيّر a لإنتاج السلعة b ، وتشير هذه النتيجة إلى تحقيق الهدف الأمثل. فطبقًا لها تكون التكلفة الحدِّية للعنصر المتغيّر a مساوية لإيراده الحدِّي.

أما الشرط:

$$\frac{\partial L}{\partial y_{jk}} = - \frac{\partial k}{\partial y_{jk}} + \lambda \frac{\partial Q}{\partial y_{jk}} - u_j \leqslant 0$$

فيمكن إعادة صياغته كالآتي:

$$\lambda \frac{\partial Q}{\partial y_{jk}} - \frac{\partial k}{\partial y_{jk}} \leqslant u_j$$

وتشير هذه المعادلة الأخيرة إلى أن القيمة الحدِّية المحسوبة لاستخدام وحدة واحدة من العنصر الثـابت j في إنتاج السلعة k ناقصا التكلفة الحدِّية لتحويل وحدة واحدة من المتغـير الثـابت j لإنتـاج السلعـة k لابد أن تكون مساوية أو أقل من القيمة الحدِّية المحسوبة للعنصر الثابت j ، فإذا تحققت المساواة في المعادلة الأخيرة فإن العنصر الثابت j يكون قد استخدم استخداما أمثل بالنسبة لإنتاج السلعة k ؛ أما إذا تحققت المتباينة فإن المنشأة لن تستخدم العنصر الثابت j في إنتاج السلعة k.

ويجب ملاحظة أنه إذا كان هناك طاقة فائضة في استخدام العنصر الثابت j فإن هذا الشرط لن يكون ذا أثر، وتصبح المعادلة الأخيرة :

$$-\frac{\partial K}{\partial y_{jk}} + \lambda \frac{\partial Q}{\partial y_{jk}} = 0$$

ويلاحظ أن تحقيق الشروط الثـلاثـة الأُول سوف يترتب عليه تحقيق الشرط الرابع ؛ لأنه إما

$$\frac{\partial R}{\partial Z_k} + \lambda \frac{\partial Q}{\partial Z_k} = 0$$

أو

$$\bar{Z}_k = 0$$

وإما

$$-\frac{\partial C}{\partial x_{ik}} + \lambda \frac{\partial Q}{\partial x_{ik}} = 0$$

أو

$$\bar{x}_{ik} = 0$$

وإما

$$-\frac{\partial k}{\partial y_{jk}} + \lambda \frac{\partial Q}{\partial y_{jk}} - u_j = 0$$

أو

$$\bar{y}_{jk} = 0$$

ولتحديد المضمون الاقتصادي للشرط الرابع نعيد كتابة هذا الشرط كالآتي:

$$\sum_{k=1}^{p} \frac{\partial R}{\partial Z_k} \bar{Z}_k - \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial C}{\partial x_{ik}} \cdot \bar{x}_{ik} - \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial k}{\partial y_{jk}} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} u_j \bar{y}_{jk} - \lambda \Big[\sum_{k=1}^{p} \frac{\partial Q}{\partial z} \bar{Z}_k + \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial Q}{\partial y_{jk}} \cdot \bar{y}_{jk} \Big]$$

وتشير هذه المعادلة إلى أن الأرباح الكلية للمنشأة يجب أن تساوي التكلفة المحسوبة لمواردها النادرة.

أما الشرط الخامس والسادس والسابع فلا بد أن تتحقق حتى تكون للمتغيرات قيم ذوات معنى اقتصادي (عنصر الإنتاج مثلا يكون موجبًا).

وتشير دالة الإنتاج إلى أن المساواة سوف تتحقق دائما في الشرط الثامن؛ فإذا كان هناك فائض في عرض العنصر الثابت j فإن المتباينة سوف تتحقق في الشرط التاسع، وتكون $\mu = 0$. أما إذا لم يكن هناك فائض في عرض هذا العنصر فإن المساواة سوف تتحقق بالنسبة للشرط التاسع؛ ومن ثم فإن الشرط التاسع لابد أن يتحقق، وحيث إن $Q = 0$ فإن معادلة هذا الشرط يمكن إعادة كتابتها كالآتي:

$$\sum u_j \bar{y}_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{p} u_j \bar{y}_{jk}$$

وتفيد هذه المعادلة في أن القيمة الكلية المحسوبة للموارد النادرة المتاحة للمنشأة يجب

أن تكون مساوية للقيمة الكلية للموارد النادرة المستخدمة في العملية الصناعية.

وأخيراً يفيد الشرطان الأخيران أن مضاعفات لاجرانج يجب أن تكون غير سالبة.

مثال

لنفترض أن منشأة ما تحاول أن تحدد عدد الوحدات المنتجة من السلعة x في شهري يناير وفبراير، وترغب المنشأة في أن يتوافر لديها مخزون سلعي في نهاية يناير يعادل ١٠٠ وحدة، ومخزون سلعي في نهاية فبراير يعادل ٢٠٠ وحدة، وسوف نفترض تكلفة الإنتاج الآتية في كل شهر:

$$C = 2x^2$$

وسوف نفترض أن المنشأة تتحمل تكلفة تخزين قدرها 8 عن كل وحدة من إنتاج شهر يناير لم تبع حتى شهر فبراير. فتصبح تكلفة الإنتاج مساوية:

$$C = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 8\,(x_1 - 100)$$

حيث:

x_1 = الكميات المنتجة في شهر يناير.

x_2 = الكميات المنتجة في شهر فبراير.

وتصبح مشكلة المنشأة هي تعظيم الدالة:

$$C = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 8\,(x_1 - 100)$$

مع مراعاة أن:

$$x_1 \geqslant 100$$

$$x_1 + x_2 \geqslant 300$$

$$x_1, x_2 \geqslant 0$$

ومن دالة لاجرانج نحصل على:

$$L = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 8(x_1 - 100) + \lambda_1(100 - x_1) + \lambda_2(300 - x_1 - x_2)$$

ومن شروط Kuhn - Tucker نحصل على:

$$\text{(i)} \quad 4x_1 + 8 - \lambda_1 - \lambda_2 \geqslant 0$$
$$4x_2 - \lambda_2 \geqslant 0$$

$$\text{(ii)} \quad (4x_1 + 8 - \lambda_1 - \lambda_2)\, x_1 + (4x_2 - \lambda_2)\, x_2 = 0$$

$$\text{(iii)} \quad x_1 \geqslant 0; x_2 \geqslant 0$$

$$\text{(iv)} \quad 100 - x_1 \leqslant 0$$
$$300 - x_1 - x_2 \leqslant 0$$

$$\text{(v)} \quad (100 - x_1)\, \lambda + (300 - x_1 - x_2)\, \lambda_2 = 0$$

$$\text{(vi)} \quad \lambda_1 \geqslant 0, \lambda_2 \geqslant 0$$

وبالمحاولة والخطأ يمكننا أن نحصل على قيم x_1, x_2 التي تحقق التوازن:

(أ) *بافتراض أن* $\lambda_2 > 0; \lambda_1 > 0$

فإن الشرط الخامس يعطي

$$100 - x_1 = 0$$
$$300 - x_1 - x_2 = 0$$

ونحصل على:

$$x_1 = 100$$
$$x_2 = 200$$

وبافتراض أن $x_1 > 0, x_2 > 0$

فإن الشرط الثاني يعطي:

$$4x_1 + 8 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0$$
$$4x_2 - \lambda_2 = 0$$

وبتعويض قيم x_1 ، x_2 أعلاه من هاتين المعادلتين نحصل على:

$$\lambda_1 = -392, \lambda_2 = 800$$

إلا أن λ_1 لا يجوز أن تكون سالبة.

(ب) بافتراض أن: $\lambda_1 = 0; \lambda_2 \neq 0$

$$x_1 > 0, x_2 > 0$$

نحصل على:

$$300 - x_1 - x_2 = 0$$

$$4x_1 + 8 - \lambda_1 - \lambda_2 = 0$$

$$4x_2 - \lambda_2 = 0$$

وحيث إننا افترضنا أن $\lambda_1 = 0$ نحصل على **٣** معادلات فيها **٣** مجاهيل، وبحلّ هذه المعادلات حلاً آنيًا:

$$x_1 = 149$$

$$x_2 = 151$$

$$\lambda_2 = 604$$

$$\lambda_1 = 0$$

وبالتعويض نجد أن هذه القيم تحقق جميع الشروط الستة المذكورة أعلاه، وهكذا فإن المنشأة تحقق أقل تكلفة ممكنة عندما تنتج **١٤٩** وحدة في يناير، وعدد **١٥١** وحدة في فبراير. وتشير قيمة $\lambda_1 = 0$ ، إلا أن التغير الطفيف في قيد يناير الخاص بالطلب لا يؤثّر في تكلفة الإنتاج.

أما الشرط الكافي للتوازن فيتحقق عند القيم المذكورة، وذلك لأن:

$$\bar{\hat{S}}_2 = \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & \psi^1 & \psi_1^2 \\ L_{21} & L_{22} & \psi_2^1 & \psi_2^2 \\ \psi_1^1 & \psi_2^1 & 0 & 0 \\ \psi_1^2 & \psi_2^2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad 1 > 0$$

(٥ ـ ٦) تمرينات

١) إذا كانت دالة الطلب لمنشأة ما هي:

$$4p + Q - 16 = 0$$

وكانت دالة التكاليف المتوسطة:

$$AC = \frac{4}{Q} + 2 - 0.3Q + 0.05Q^2$$

احسب Q التي تعطي:

(ا) أقصى إيراد كلي ممكن

(ب) أقل تكلفة حدِّية

(جـ) أقصى ربح ممكن

٢) يواجه محتكر دالة الطلب الآتية:

$$p = 30 - 0.75Q$$

فإذا كانت دالة التكاليف المتوسطة:

$$AC - \frac{30}{Q} = 9 + 0.3Q$$

احسب Q التي تعطي:

(أ) أقصى إيراد ممكن

(ب) أقل تكلفة متوسطة ممكنة

(جـ) أقصى ربح ممكن

٣) بافتراض دالة الطلب

$$Q_D = 40 - 2p$$

ودالة العرض

$$2p - Q_S = 20$$

بافتراض أن الحكومة تفرض ضريبة قدرها t لكل وحدة مباعة وأن البائعين يكيفون دالة عرضهم لمواجهة الضريبة، احسب:

(أ) معدّل الضريبة الذي يحقق أقصى حصيلة ضريبة ممكنة.

(ب) الحصيلة العظمى للضريبة.

٤) يواجه محتكر دالة الطلب:

$$p + 3Q - 30 = 0$$

وتكلفته الكلية هي:

$$TC = 2Q^2 + 10Q$$

فإذا فرضت الحكومة ضريبة على الكمية المنتجة بمعدل t للوحدة الواحدة. احسب أقصى حصيلة ضرائب ممكنة.

٥) يتبع محتكر ما سياسة التمييز السعري في سوقين مختلفتين لهما دوال الطلب الآتية:

السوق الأول

$$Q_1 = 16 - 0.2p_1$$

السوق الثاني:

$$p_2 = 180 - 20Q_2$$

فإذا كانت دالة تكاليف المحتكر هي:

$$TC - 20Q - 20 = 0$$

حيث

$$Q = Q_1 + Q_2$$

وإذا كان المحتكر يرغب في تحقيق أقصى ربح ممكن احسب:

(ا) الأسعار التي يتقاضاها المحتكر في كل من السوقين.

(ب) أرباح المحتكر في حالة اتباع، وفي حالة عدم اتباع سياسة التمييز السعري.

٦) يواجه محتكر يقوم بإنتاج سلعتين x_1 ، x_2 دوال الطلب الآتية:

$$p_1 = 13 - 2x_1 + x_2$$

$$p_2 = 13 + x_1 - 2x_2$$

فإذا كانت دالة التكاليف المشتركة هي:

$$C = x_1 + x_2$$

احسب مستوى الإنتاج والأسعار الذي يحقّق للمحتكر أقصى ربح ممكن.

٧) تقوم منشأة بإنتاج سلعتين x, y ، فإذا كانت المنشأة ترغب في إنتاج:

$$x + 2y \geqslant 24$$

بأقل تكلفة ممكنة. احسب كمية الوحدات المنتجة من السلعتين إذا كانت دالة التكاليف:

$$C = 5x^2 + 6y^2 - xy$$

٨) إذا كانت دالة أرباح منشأة تنتج سلعتين x, y تساوي:

$$\Pi = 12xy - 3y^2 - x^2$$

احسب كميات الإنتاج اللازم إنتاجها من السلعتين لتحقيق أقصى ربح ممكن بشرط أن يتحقق القيد:

$$x + y \leqslant 16$$

الفصل السادس

توازن السوق

(٦ ـ ١) فائض المستهلك
وفائض المنتج

يتحقق توازن السوق عندما تتساوى الكميات المطلوبة من السلعة مع الكميات المعروضة، وتعطي علاقة الطلب السعر الذي يمكن أن تباع به كمية معيَّنة من السلعة أما دالة العرض فتوضِّح السعر الذي يرغب البائعون الحصول عليه لبيع كمية معيَّنة من السلعة.

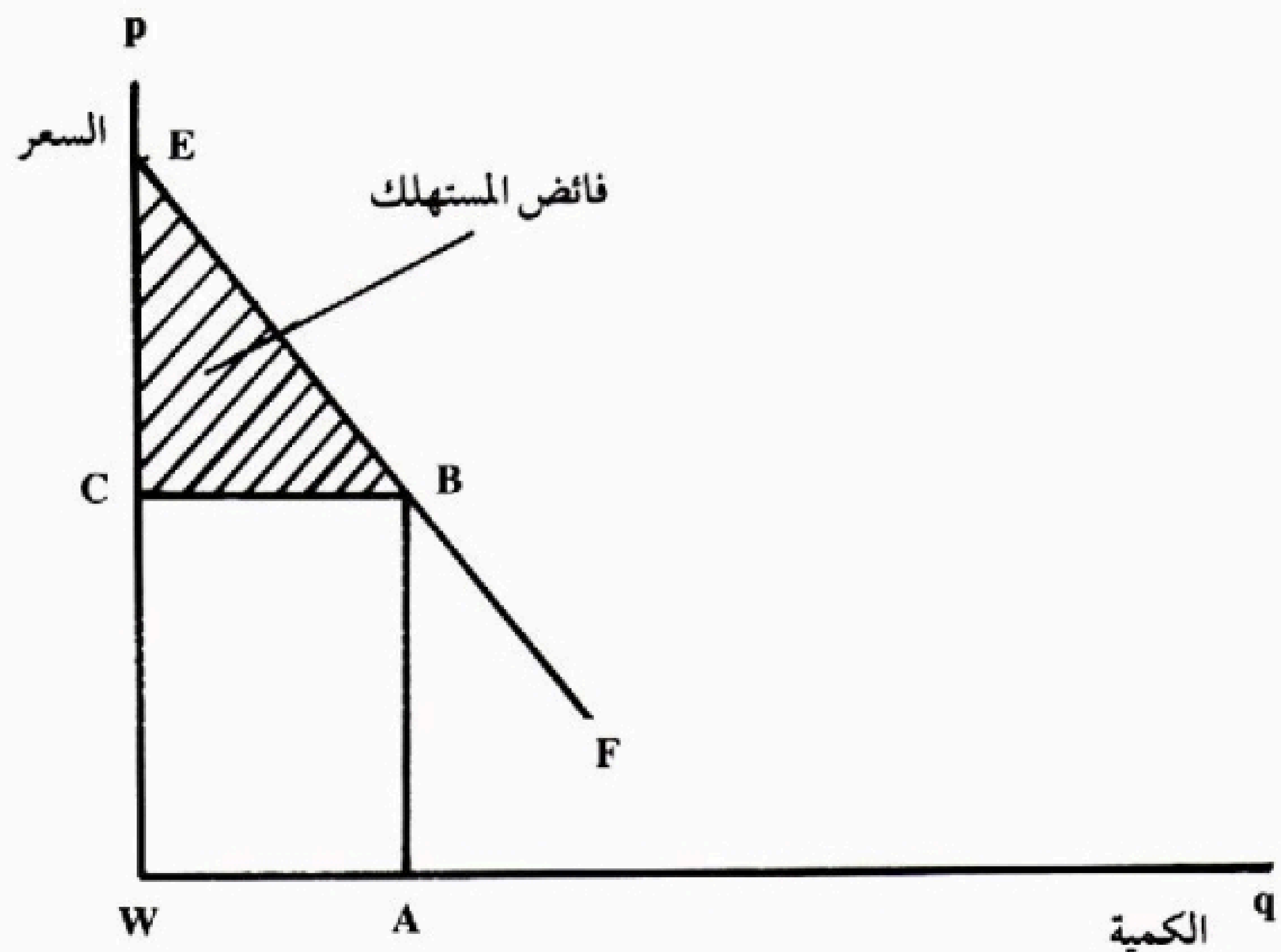
(٦ ـ ١ ـ ١) فائض المستهلك

لايعكس السعر في سوق المنافسة ما يرغب الأفراد في دفعه لكل وحدة من السلعة بديلاً عن عدم شرائها، إلا أن السعر يعكس التقويم الذي يعطيه الأفراد لآخر وحدة يشترونها.

يوضِّح الشكل البياني رقم (٦ ـ ١) دالة الطلب EF حيث يقاس السعر على المحور الرأسي والكميات على المحور الأفقي.

فإذا كان السعر WC كانت الكمية المطلوبة WA ، وتكون القيمة التي يدفعها المستهلكـون مسـاوية WABC ؛ إلا أن العائد الذي يحصل عليه المستهلكون يقدر بالمساحة الكلية تحت منحنى الطلب في المدى WA أو:

العائد على المستهلكين = WABE



شكل رقم (٦ ـ ١) دالة الطلب

ومن ثم يمكن تعريف فائض المستهلك بأنه :

فائض المستهلك = العائد على المستهلكين − القيمة المدفوعة

$$C_s = WABE - WABC = CBE$$

حيث C_s تمثِّل فائض المستهلك.

فلو افترضنا أن دالة الطلب خطِّية

$$p = a - bq$$

حيث تكون a, b كميات موجبة ثابتة فإننا نحصل على :

$$WABE = \int_0^{\bar{q}} (a - bq)\, dq$$

حيث :

$$\bar{q} = WA$$

لكن

$$\int_0^{\bar{q}} (a - bq)\, dq = [aq - 0.5bq^2]_0^{\bar{q}} = a\bar{q} - 0.5b(\bar{q})^2$$

أي أن :

$$WABE = a\bar{q} - 0.5b\,(\bar{q})^2$$

لكن :

$$WABC = p\bar{q}$$

وحيث إنه عند النقطة B:

$$p = a - b\bar{q}$$

فإن :

$$WABC = (a - b\bar{q})\,\bar{q} = a\bar{q} - b\,(\bar{q})^2$$

وهكذا يكون فائض المستهلك مساويًا :

$$C_s = a\bar{q} - 0.5\,b\,(\bar{q})^2 - a\bar{q} + b\,(\bar{q})^2$$

$$= 0.5b\,(\bar{q})^2$$

(٦ ـ ١ ـ ٢) فائض المستهلك ومرونة الطلب الثابتة

إذا كانت دالة الطلب تأخذ أحد الأشكال

$$pq^b = a$$

أو

$$p = aq^{-b}$$

حيث a, b ثوابت فإن مرونة الطلب تكون ثابتة :

$$\eta_d = -\frac{dq}{dp}\;\frac{p}{q} = \frac{-1}{dp/dq}\;.\;\frac{p}{q}$$

$$\eta_d \;=\; \frac{1}{-abq^{-b-1}}\;.\;\frac{aq^{-b}}{q}$$

$$= \frac{-1}{abq^{-b-1}}\,.\,aq^{-b-1}$$

$$= \frac{-1}{b} = \text{مقدار ثابت}$$

فإذا رغبنا في حساب فائض المستهلك من $q = 0$ إلى $q = \bar{q}$ فإن ذلك يتطلب طرح $p\bar{q}$ من المساحة تحت منحنى الطلب على المدى المذكور.

المساحة تحت المنحنى من 0 إلى $\bar{q}$ تساوي :

$$\int_0^{\bar{q}} a\,\bar{q}^b\,dq \left[\frac{aq^{-b+1}}{-b+1}\right]_0^{\bar{q}} = \frac{a(\bar{q})^{1-b}}{1-b}$$

هذا، وبافتراض أن $b < 1$ ، فإذا كانت $b > 1$ أو كانت $-\eta < 1$ – فإن هذه المساحة تكون غير محددة، وهكذا فإن b لابد أن تكون سالبة، كما أن η لابد أن تكون سالبة.

$$p\bar{q} = [a(\bar{q})^{-b}]\,\bar{q} = a(\bar{q})^{1-b}$$

حيث $p = a(\bar{q})^{-b}$ عندما $q = \bar{q}$ وهكذا:

$$C_s = \frac{a(\bar{q})^{1-b}}{1-b} - a(\bar{q})^{1-b}$$

$$= a(\bar{q})^{1-b}\left[\frac{1}{1-b} - 1\right]$$

$$= a(\bar{q})^{1-b}\left(\frac{b}{1-b}\right)$$

لكن

$$a(\bar{q})^{1-b} = p\,.\,\bar{q}$$

تمثّل الكمية التي يدفعها المستهلكون.

وبناءً على ذلك إذا كانت مرونة الطلب ثابتة، فإن فائض المستهلك يكون ثابتا

(في هذه الحالة $\beta / (1 - \beta)$. مضروبا في الكمية المنفقة على السلعة) .

فإذا كانت دالة الطلب :

$$p^3 q = 1000$$

أو

$$p = 10q^{-1/3}$$

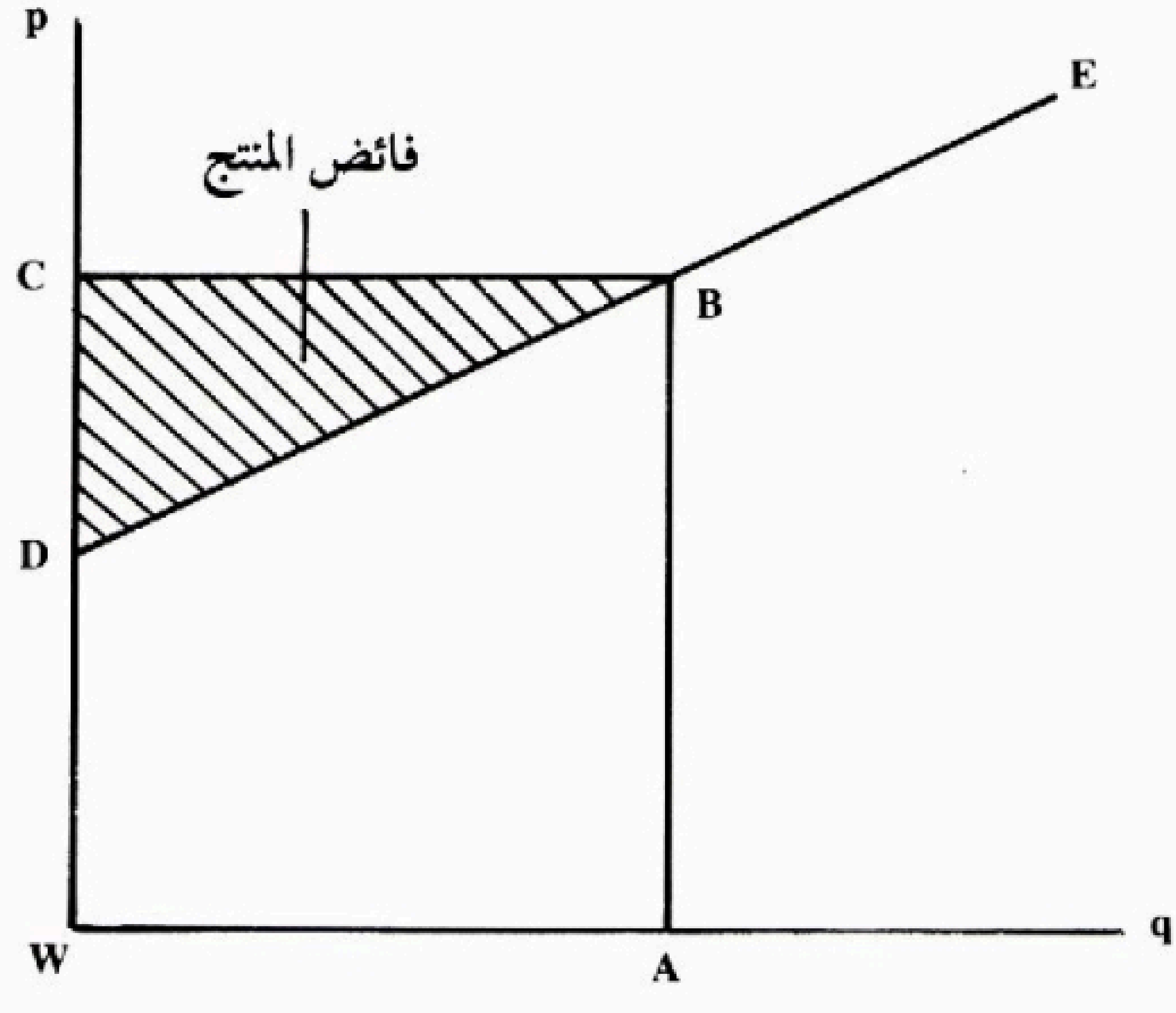
فإن المبلغ الذي يدفعه المستهلكون عندما يكون السعر $p = 2$ يكون مساويا 250 ويكون فائض المستهلك :

$$250\left(\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}\right) = 125$$

حيث $b = \frac{1}{3}$.

(٦ ـ ١ ـ ٣) فائض المنتج

يتضح من الشكل رقم (٦ ـ ٢) أن المنتجين سوف يعرضان الكمية WA إذا كان السعر WC.



شكل رقم (٦ ـ ٢)

عنـد السعر WC يكون فائض المنتج مساويًا لمساحة المستطيل WABC ناقصًا المساحة تحت منحنى العرض DE في المجال WA أو

$$P_s = WABC - WABD = DBC$$

حيث P_s ترمز إلى فائض المنتج .

فلو افترضنا أن منحنى العرض :

$$p = (a + 2q)^2$$

وأن $\bar{q} = WA$ نحصل على :

$$\int (a + 2q)^2\, dq = \frac{(a + 2\,q)^3}{6} + k$$

أي أن

$$WABD = \int_0^{\bar{q}} (a + 2q)^2\, dq$$

$$= \frac{1}{6}(a + 2\bar{q})^3 - \frac{a^3}{6}$$

لكن :

$$WABC = p\,.\,q = p\,.\,\bar{q}$$

$$= (a + 2\,\bar{q})^2\,\bar{q}$$

وهكذا يكون فائض المنتج مساويًا :

$$P_s = \bar{q}\,(a + 2\,\bar{q})^2 \left(\frac{4\,\bar{q} - a)}{6\bar{q}} \right) + \frac{a^3}{6}$$

(٦ ـ ٢) ديناميكية السوق وشروط الاستقرار

سوف نحاول في هذا الجزء من الكتاب أن نتعرض لتوازن السوق واستقراره في حالـة ما إذا كانت علاقة الكميات بالأسعار علاقة ديناميكية أو حركية أي يدخلها عنصر الزمن.

(٦ ـ ٢ ـ ١) استخدام المعادلات الزمنية في تحليل ديناميكية السوق

لنفترض أننا نرغب في معرفة تحت أي ظروف أو شروط تتجه الأسعار والكميات نحو التوازن، إذا كانت الكمية في الفترة t دالة للسعر في الفترة نفسها:

$$Q_t = a - b\,p_t$$

ولكن الكمية المعروضة دالة للسعر في الفترة السابقة $(t - 1)$ أو

$$Q_t = c + g\,p_{t-1}$$

حيث تكون a, b, c, g ثوابتًا؛ ولنفترض أن هناك سعرًا توازنيًا $\bar{p}$، وكمية توازن $\bar{Q}$، وأن سعر التوازن وكمية التوازن لن يتغيرا بعد الوصول إليهما؛ أي أنه إذا كانت:

$$p_t = p_{t-1} = \bar{p}$$

وكانت

$$Q_t = \bar{Q}_t$$

فإن دالة الطلب تعطي:

$$\bar{Q} = a - b\,\bar{p}$$

ودالة العرض تعطي:

$$\bar{Q} = c + g\,\bar{p}$$

وهكذا عند التوازن نحصل على:

$$a - b\,\bar{p} = c + g\,\bar{p}$$

ومن ثم فإن:

$$\bar{p}\,(b + g) = a - c$$

أي أن :

$$\bar{p} = \frac{a - c}{b + g}$$

$$\bar{Q} = a - b\left(\frac{a - c}{b + g}\right)$$

$$\bar{Q} = \frac{ag + bc}{b + g}$$

فإذا كانت السلعة عادية نحصل على :

$$b > 0; g > 0; b + g > 0$$

وهكذا تكون $\bar{p} > 0$ ، إذا كانت $a > 0$ ، وتكون $\bar{Q} > 0$ ، إذا كانت $ag + bc > 0$.

لو افترضنا أن $p_t \neq \bar{p}$ فإنه يمكننا أن نعبِّر عن الانحراف بين السعر الفعلي، وسعر التوازن في الفترة t كالآتي :

$$V_t = p_t - \bar{p}$$

أو:

$$p_t = \bar{p} + V_t$$

وإذا كانت $Q_t \neq \bar{Q}$ فإننا نعبِّر عن الانحراف بين الكمية الفعلية وكمية التوازن كالآتي :

$$W_t = Q_t - \bar{Q}$$

أو:

$$Q_t = \bar{Q} + W_t$$

إذا اقتربت كل من V ، W من صفر فإن السعر الفعلي والكمية الفعلية يقتربان من سعر التوازن وكمية التوازن أو:

فإذا كان

$$V_t \to 0 \quad \text{عندما} \quad t \to \infty$$

فإن $p_t \rightarrow \bar{p}$

وإذا $W_t \rightarrow 0$ عندما $t \rightarrow \infty$

فإن $Q_t \rightarrow \bar{Q}_t$

فإذا بدأ النظام عند مستوى سعر ما (p_0) ، فإن سلوك السعر الفعلي والكمية الفعلية بالنسبة للزمن سوف يتوقفان على انحرافهما؛ وهكذا نحتاج إلى حل المشكلة بالنسبة للانحرافات W_t و V_t ويتطلب هذا أن نعوّض عن قيمة p_t بقيمة V_t وأن نعوّض عن قيمة Q_t بقيمة W_t في معادلات الطلب والعرض الأصلية. فنحصل على معادلتين من مجهولين W_t و V_t.

ومن معادلة الطلب نحصل على :

$$Q_t = a - b\,p_t$$

وهكذا :

$$\bar{Q} + W_t = a - b\,(\,\bar{p} + V_t\,)$$

أي أن :

$$\bar{Q} + W_t = a - b\,\bar{p} - b\,U_t$$

فإذا طرحنا المعادلة :

$$\bar{Q} = a - b\,\bar{p}_s$$

من المعادلة الأخيرة نحصل على :

$$W_t = -\,b\,V_t \qquad \ldots \text{(i)}$$

ومن معادلة العرض نحصل على :

$$Q_t = c + g\,p_{t-1}$$

أي أن :

$$\bar{Q} + W_t = c + g\,\bar{p} + g\,V_{t-1}$$

وإذا طرحنا المعادلة :

$$\bar{Q} = c + g\,\bar{p}$$

من المعادلة الأخيرة نحصل على :

$$W_t = g\,V_{t-1} \qquad \ldots \text{(ii)}$$

ومن المعادلتين (i) ، (ii) نحصل على :

$$W_t = -\,b\,V_t = g\,V_{t-1}$$

ومن ثم فإن :

$$V_t = -\,(g/b)\,V_{t-1}$$

وحيث إن هذا صحيح بالنسبة لكل قيم t ، فإنه يمكن كتابة هذه القيم كالآتي :

$$\begin{aligned} V_1 &= (-\,g/b)\,V_0 \\ V_2 &= (-\,g/b)^2\,V_0 \\ &\;\vdots \\ V_t &= (-\,g/b)^t\,V_0 \end{aligned}$$

حيث V_0 تمثِّل الانحراف للثمن الأساس أو الأصلي p_0 عند التوازن ؛ أي أن :

$$V_0 = p_0 - \bar{p}$$

لكن :

$$p_t = \bar{p} + V_t$$

وهكذا فإن المسار الزمني للسعر الفعلي يتحدد بالعلاقة :

$$p_t = \bar{p} + (-\,g/b)^t\,V_0$$

وتتوقف استقرارية السعر على $(-g/b)^t$ ، فإذا اقتربت $(-g/b)^t$ من الصفر عندما تقترب t من ∞ ، فإن $(-g/b)^t V_0$ تقترب من الصفر، ويقترب p_t من سعر التوازن $\bar{p}_t$.

لقد سبق أن رأينا أن (g/b) مقدار موجب بافتراض دوال طلب وعرض عادية، وهكذا فإن $(-g/b)^t$ سوف تكون سالبة إذا كانت t فردية، وتكون موجبة إذا كانت t زوجية، وسوف يسبب ذلك تقلبات حول مستوى السعر التوازني؛ إلا أن هذه التقلبات سوف تتلاشى تدريجيًا إذا كانت $|g/b| < 1$ ؛ أي إذا كانت $g < b$ ، حيث $(-g/b)^t$ تقترب من الصفر إذا اقتربت t من ∞ . فإذا اقتربت V_t من صفر عندما تقترب t من ∞ فإن $W_t \to 0$ أيضًا؛ حيث $W_t = -b\,V_t$. وهكذا $Q_t \to \bar{Q}$ ، إذا $|g/b| < 1$. وعندما تكون $|g/b| < 1$ فإن قيم p_t لكل قيم $t \geqslant 2$ سوف تقع بين p_0 ، p_1 ؛ فإذا افترضنا مثلاً $V_0 > 0$:

فإنه إذا كانت $t = 0$:

$$p_0 = \bar{p} + (-g/b)^0 V_0 = \bar{p} + V_0$$

وإذا كانت $t = 1$:

$$p_1 = \bar{p} + (-g/b)^1 V_0$$

وإذا كانت $t = 2$:

$$p_2 = \bar{p} + (-g/b)^2 V_0$$

وإذا كانت $t = 3$:

$$p_3 = \bar{p} + (-g/b)^3 V_0$$

حيث:

$$p_2 < p_0 \quad \text{لكن} \quad p_2 > p_1$$

$$p_3 < p_0 \quad \text{لكن} \quad p_3 > p_1$$

ومن ثم لو رغبنا في التحقق من المعنى الاقتصادي للنموذج؛ أي التأكد من أن $p_t \geqslant 0$ ، $Q_t \geqslant 0$ لكل قيم $t \geqslant 0$
فإن هذا يتطلب فقط أن نحدّد قيم المتغيّرات p_0, p_1, Q_0, Q_1 ، إذا كان النظام مستقرًا. فإذا كانت $|g/b| > 1$ ؛ أي إذا كانت $g > b$ فإن $(-g/b)^t \to \pm\infty$ عندما تقترب

t من ∞ ، وهــذا سوف يؤدي إلى المــزيد من التقلبــات حول سعـر التـوازن $\bar{p}$ ، حيث $V_t \to \pm \infty$ عندما $t \to \infty$. كذلك $W_t \to \pm \infty$ عندما $t \to \infty$. وهذا النموذج سوف يعـطي سعرًا سالبًا وكميات سالبة لبعض قيم t ، وهذا مستحيل من الناحية الاقتصادية ، ويوحي بأن النظام الخطّي لا يصلح لأن يكون وصفًا للاقتصاد الحقيقي .

(٦ ـ ٢ ـ ٢) توازن السوق مع وجود مخزون

لنفترض أن لدينا نموذجًا يحدّد فيه البائعون السعر عند مقدرتهم على الاحتفاظ بمخزون وأن هؤلاء البائعين يرفعون السعر إذا لاحظوا نقصًا في المخزون ، ويخفضون السعر إذا ما اعترى المخزون زيادة واضحة ، فلو كان مستوى المخزون المرغوب هو $\bar{S}$ فإننا نحصل على :

$$p_t = p_{t-1} - \lambda (S_{t-1} - \bar{S}) \qquad \dots \text{(i)}$$

حيث $\lambda > 0$ ، فإذا كان المخـزون في نهاية الفترة $t - 1$ (S_{t-1}) أكبر من الحد المرغوب ، أي أن $S_{t-1} > \bar{S}$ فإن البائعين سوف يخفضون السعر في الفترة اللاحقة ، أي $p_t < p_{t-1}$. أما إذا كان $S_{t-1} < \bar{S}$ فإن p_t سوف يكون أكبر p_{t-1} ، وإذا كانت $S_t = \bar{S}$ فإن $p_t = p_{t-1}$ ويكون السعر مستقرًا ، وتمثّل λ معامل التكييف أي معامل رفع أو خفض السعر تبعًا للحالة .

يتضـح أن المعادلة السابقة معادلة فروق ، أو معادلة زمنية في متغيّرين . ومن المعروف أن المخزون في الفترة t يساوي المخزون في نهاية الفترة $t - 1$ مضافًا إليه فائض العرض في الفترة t ، فإذا كان X_t فائض العرض في الفترة t دالة متزايدة للسعر في الفترة السابقة p_{t-1} فإنه يأخذ الصورة :

$$X_t = -A + ap_{t-1}$$

حيث a ، A ثوابت موجبة وأن :

$$S_t = S_{t-1} + X_t$$

أي أن :

$$S_t = S_{t-1} - A + ap_{t-1} \qquad \dots \text{(ii)}$$

وهذه المعادلة الأخيرة هي معادلة زمنية أو معادلة فروق في متغيّرين، حيث المخزون دالة للسعر أو المخزون في فترة متباطئة.

إذا كانت $S_t \neq \bar{S}$ وكانت $p_t \neq \bar{p}$ وبافتراض أن u_t تمثّل انحراف S_t عن $\bar{S}$ وأن w_t تمثّل انحراف p_t عن $\bar{p}$ ، فإن المعادلة (i) تصبح

$$w_t = w_{t-1} - \lambda u_{t-1} \qquad \dots (iii)$$

والمعادلة (ii) تصبح

$$u_t = u_{t-1} + a w_{t-1} \qquad \dots (iv)$$

ومن هاتين المعادلتين الأخيرتين نحصل على معادلة زمنية من الدرجة الثانية في المتغير u

$$w_{t-1} = \frac{1}{a} u_t - \frac{1}{a} u_{t-1}$$

ومن المعادلة الأخيرة نحصل على:

$$w_t = \frac{1}{a} u_{t+1} - \frac{1}{a} u_t$$

وبتعويض هذه القيم في المعادلة (iii) نحصل على:

$$\frac{1}{a} u_{t+1} - \frac{1}{a} u_t = \frac{1}{a} u_t - \frac{1}{a} u_{t-1} - \lambda u_{t-1}$$

وبالضرب في (a) وبالاختصار، نحصل على:

$$u_{t+1} - 2u_t + (1 + a\lambda) u_{t-1} = 0$$

أو:

$$u_t - 2u_{t-1} + (1 + a\lambda) u_{t-2} = 0$$

فإذا وضعنا

$$u_t = u_0 r^t$$

وقسمنا المعادلة الأُخيرة على $u_0 r^t$ نحصل على المعادلة :

$$r^2 - 2r + 1 - a\lambda = 0$$

ولن يكون للمعادلة الاخيرة جذور حقيقية حيث $(-2)^2 < 4(1 + a\lambda)$ ؛ ومن ثم سوف يعتري النظام تقلبات تتزايد حيث $1 + a\lambda > 1$ ، وهكذا تقترب u_t من $\pm\infty$ كلما اقتربت t من ∞ ، ولن تقترب S_t أبدًا من $\bar{S}$ ، وبالمنطق نفسه لن تقترب p_t من $\bar{p}$ ؛ وحيث إن النموذج سوف يؤدِّي إلى مستويات أسعار وإنتاج سالبة، فلا يمكن أن يمثِّل الحياة الواقعية إلا في مدى محدود.

(٦ - ٢ - ٣) استخدام المعادلات التفاضلية في تحديد شروط الاستقرارية

لنفترض أن لدينا نموذجًا حيث معدّل تغيّر المخزون $\dot{S}_t$ $(\dot{S}_t = dS/dt)$ نسبة مباشرة لفائض العرض X_t وأن

$$X_t = -A + ap_t$$

حيث A ، a ثوابت موجبة.

في هذه الحالة نحصل على :

$$\dot{S} = \lambda(-A + ap_t)$$

حيث $\lambda > 0$ ؛ أي أن

$$\dot{S}_t = -A\lambda + a\lambda p_t \qquad \text{(i)}$$

فلو افترضنا أن المنتجين يكيِّفون سعرهم p_t ليساوي السعر المخطط p'_t ، بمعدّل سرعة يتناسب مع الفرق بين p'_t ، $\dot{p}_t$ فإن

$$\dot{p}_t = \beta(p'_t - p_t)$$

حيث $\beta > 0$. ويلاحظ أن $\dot{p}_t > 0$ عندما $p'_y > p_t$ وأن $\dot{p}_t < 0$ عندما $p'_y < p_t$.

فإذا كان السعر المخطط يرتبط بالمخزون بالعلاقة :

$$p_t' = M - bS_t$$

حيث M ، b ثوابت موجبة فإننا نحصل على :

$$\dot{p}_t = \beta (M - b\, S_t - p_t)$$

أي أن :

$$\dot{p}_t = M\beta - b\,\beta\, S_t - \beta\, p_t \qquad \ldots \text{(ii)}$$

والمعـادلات (i) ، (ii) معادلات تفاضلية من الدرجة الأولى في متغيّرين هما : S, p ويعطي حل المعادلتين معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية .

فإذا تحققت القيم التوازنية $\bar{S}$ ، $\bar{p}$ للمعادلتين بعد حلهما آنيًّا فإن

$$\dot{S}_t = \dot{p}_t = 0$$

عند نقاط التوازن ، وتصبح المعادلة (i) عند التوازن :

$$-A\,\lambda + a\,\lambda\,\bar{p} = 0$$

أو

$$\bar{p} = \frac{A}{a}$$

والمعادلة (ii) تصبح عند التوازن :

$$M\,\beta - b\,\beta\,\bar{S} - \beta\,\bar{p} = 0$$

وبالتعويض من قيمة $\bar{p}$ عند التوازن في المعادلة الأخيرة نحصل على :

$$M\beta - b\beta\bar{S} - \frac{\beta A}{a} = 0$$

أو

$$\bar{S} = \frac{a\,M - A}{ab}$$

إذا كانت $S_t \neq \bar{S}$ ، وإذا كان الانحراف مساويًا u_t فإن :

$$S_t = \bar{S} + u_t = \frac{a\,M - A}{ab} + u_t$$

وكذلك :

$$\dot{S}_t = \dot{u}_t$$

حيث $\dot{\bar{S}} = 0$.

وإذا كانت $p_t \neq \bar{p}$ ، وكانت w_t تمثّل الانحراف فإن :

$$p_t = \bar{p} + w_t = \frac{A}{a} + w_t$$

وكذلك

$$\dot{p}_t = \dot{w}_t$$

حيث $\dot{\bar{p}} = 0$.

وبالتعويض عن القيم $\dot{p}_t$ ، p_t ، $\dot{S}_t$ ، S_t في المعادلات (i) ، (ii) نحصل على :

$$\dot{u}_t = a\,\lambda\,w_t \qquad \ldots \text{(iii)}$$

$$w_t = -\,b\,\beta\,u_t - \beta\,w_t \qquad \ldots \text{(iv)}$$

ومن المعادلتين (iii) ، (iv) يمكننا أن نحصل على معادلة تفاضلية من الدرجة الثانية، إما في u أو في w ، فالمعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية في u نحصل عليها كالآتي :

$$w_t = \frac{1}{a\lambda}\,\dot{u}_t$$

ولكن من المعادلة (iii)

$$\dot{w}_t = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{a\lambda}\dot{u}_t\right) = \frac{1}{a\lambda}\ddot{u}_t$$

حيث $\ddot{u}_t = d\,\dot{u}_t / dt$.

ويتعويض هذه القيم في المعادلة (iv) نحصل على:

$$\frac{1}{a\lambda}\ddot{u}_t = -b\beta u_t - \frac{\beta}{a\lambda}\dot{u}_t$$

وبضرب الطرفين في $a\,\lambda$ نحصل على:

$$\ddot{u}_t + \beta\,\dot{u}_t + a\,b\,\beta\,u_t = 0 \qquad \text{(v)}$$

وهذه المعادلة الأخيرة معادلة تفاضلية في u من الدرجة الثانية، ولإيجاد السلوك الزمني لكل من S_t ، p_t يجب أن نحل المعادلة في المجهول u.

إذا كانت $u_t \to 0$ عندما $t \to \infty$ فإن $S_t \to \bar{S}$ ، وعندما $u_t \to 0$ فإن $\dot{u}_t \to 0$ ، وهكذا فإنه من المعادلة (iii) $a\,\lambda\,w_t,\ w_t \to 0$ وذلك لأن $a\,\lambda$ مقدار ثابت؛ ومن ثم فإن $p_t \to \bar{p}$ عندما $u_t \to 0$.

ويجب أن نبحث عن قيمة u_t التي تحقِّق صحة المعادلة (v). إذا افترضنا

$$u_t = u_0\,e^{rt}$$

حيث $u_0 = S_0 - \bar{S}$ ، وحيث تتوافر معلومات عن S_0 فإنه يتعين أن نجد قيمة أو قيمًا للثابت r بحيث $u_t = u_0\,e^{rt}$ تحقِّق المعادلة (v).

إذا كانت $u_t = u_0\,e^{rt}$ فإن:

$$\dot{u}_t = r\,u_0\,e^{rt}$$

$$\ddot{u}_t = r^2\,u_0\,e^{rt}$$

فإذا عوَّضنا عن هذه القيم في المعادلة (v) نحصل على :

$$r^2 u_0 e^{rt} + \beta r u_0 e^{rt} + a b \beta \lambda u_0 e^{rt} = 0$$

وبقسمة الطرفين على $u_0 e^{rt}$ نحصل على :

$$r^2 + \beta r + a b \beta \lambda = 0 \qquad \dots (vi)$$

فإذا كانت $\beta^2 > 4 a b \beta \lambda$ ، فإن المعادلة (vi) سوف يكون لها جذران مميزان، ولنفترض أنها r_1 ، r_2 ، وهكذا فإن :

$$u_t = u_0 e^{r_1 t}$$

$$u_t = u_0 e^{r_2 t}$$

سوف يحقِّقان صحة المعادلة (v) ؛ إلا أن هذه المعادلة تتحقق أيضًا بالمعادلة

$$u_t = g_1 e^{r_1 t} + g_2 e^{r_2 t} \qquad \dots (vii)$$

حيث g_1 ، g_2 أوزان يتعيّن تحديدها، فإذا كان كل من الجذرين r_1, r_2 سالبين فإن $u_t \to 0$ عندما $t \to \infty$ ، حيث إن $e^{r_1 t}$ وكذلك $e^{r_2 t}$ سوف يقتربان من الصفر عندما تقترب t من ∞ . وسوف يكون النظام غير مستقر إذا كان أحد الجذور موجبًا.

ولتحديد الأوزان g_1 ، g_2 لابد أن يكون لدينا معلومات عن المخزون والأسعار في نقطة البداية، فإذا حصلنا على هذه المعلومات (S_0, p_0) فإننا نستطيع أن نجد قيم $u_0, \dot{u}_0$ التي تعطي لنا معادلتين في مجهولين هما g_1 ، g_2.

ومن المعادلة رقم (vii) نحصل على :

$$u_0 = g_1 e^0 + g_2 e^0$$

أو

$$u_0 = g_1 + g_2 \qquad \dots (viii)$$

ومن المعادلة نفسها نحصل على :

$$\dot{u}_t = r_1 g_1 e^{r_1 t} + r_2 g_2 e^{r_2 t}$$

وهكذا :

$$\dot{u}_0 = r_1\, g_1\, e^0 + r_2\, g_2\, e^0$$

أي أن :

$$\dot{u}_0 = r_1\, g_1 + r_2\, g_2 \qquad \ldots \text{(ix)}$$

لكن

$$u_0 = S_0 - \bar{S}$$

وكذلك

$$\dot{u}_0 = \dot{S}_0 = -\, A\, \lambda + a\, \lambda\, p_0$$

من المعادلة (i) نحصل على قيم $u_0, \dot{u}_0$ إذا عرفنا قيم S_0, p_0 ، وبحلّ المعادلتين (viii) ، (ix) نحصل على قيم g_1, g_2.

(٦ ـ ٣) تمرينـات

١) من معادلات الطلب الآتية احسب فائض المستهلك عندما $p = 4$ ، وكذلك عندما $p = 5$

$$Q = 10 - p \qquad \text{(i)}$$

$$Q = 64\, p^{-2} \qquad \text{(ii)}$$

٢) إذا كانت دالة الطلب :

$$p = 10 - Q - Q^2$$

وكانت دالة العرض :

$$p = Q + 2$$

احسب فائض المستهلك وفائض المنتج عند التوازن .

٣) إذا كانت دالة الطلب :

$$Q = 20 - 2\, p_t$$

وكانت دالة العرض :

$$Q_t = -5 + 3\,p_{t-1}$$

أوجد قيمة p_t ، Q_t عندما $p_0 = 4$ وعلّق على استقرارية النظام .

٤) افترض العلاقة الآتية بين سعر السلعة وبين المخزون السلعي :

$$p_t = p_{t-1} - 0.8\,(S_{t-1} - 120)$$

فإذا كان مقدار المخزون المخطط = 120 ، وأن فائض العرض X_t من هذه السلعة في الفترة t دالة لسعر الفترة السابقة p_{t-1} أو

$$X_t = -52 + 0.2\,p_{t-1}$$

وأن فائض العرض يضاف إلى المخزون بحيث

$$S_t = S_{t-1} + X_t$$

علّق على استقرارية النظام، واحسب قيم S_2 ,S_t عندما $S_0 = 180$ ، $p_0 = 100$.

٥) افترض نموذجًا ما حيث التغيّر في المخزون $\dot{S}_t$ يرتبط بفائض العرض X_t طبقًا للعلاقة :

$$\dot{S}_t = X_t = -10 + 2\,p_t$$

فإذا كان المنتجون يكيّفون سعرهم p_t ليقترب من السعر المخطط p_t' بسرعة تتوقف على الفجوة بين p_t' و p_t وبحيث

$$\dot{p} = p_t' - p_t$$

وإذا كانت p_t' ترتبط بالمخزون بحيث

$$p_t' = 6 - 0.25\,S_t$$

احسب p_t ، S_t عندما $S_0 = 4$ و $p_0 = 6$.

الفصل السابع

جداول المدخلات والمخرجات

(٧ ـ ١) التداخل بين أنشطتي الاقتصاد

يستخدم تحليل المدخلات والمخرجات في توضيح التداخل بين أنشطة النظام الاقتصادي المختلفة، فيمكن تقسيم الاقتصاد إلى عدد من الصناعات يقوم كل منها بتصريف إنتاجه إما عن طريق بيعه كمادة خام للصناعات الأخرى (أو لنفسها)، أو عن طريق بيعه كسلعة للمستخدم النهائي (المستهلك أو المستثمر أو الحكومة أو القطاع الخارجي). وهكذا فإنه يمكن تقسيم الاقتصاد مبدئيًا إلى قطاعين هما: القطاع الصناعي الذي يحتوي على عدد كبير من الصناعات، وقطاع الطلب النهائي، وذلك بافتراض الآتي:

X_i = إنتاج الصناعة i

x_{ij} = إنتاج الصناعة i المباع للصناعة j

Y_i = إنتاج الصناعة i المباع للاستخدام النهائي

I_j = القيمة المضافة في الصناعة j

وبافتراض أن هناك عدد m صناعة وقطاع طلب نهائي واحد فإن معاملات الاقتصاد يمكن تمثيلها بالمعادلتين:

$$X_i = Y_i + \sum_{j=1}^{m} x_{ij} \qquad (1)$$

$$X_j = I_j + \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \qquad (2)$$

وتوضِّح المعادلة (1) كيف تتصرف الصناعة i في منتجاتها، بينما توضِّح المعادلة (2) كيف تبني الصناعة j إنتاجها.

فتوضِّح المعادلة (1) أن الصناعة i تخلصت من إنتاجها ببيع ما قيمته Y_i للطلب النهائي، وببيع ما قيمته x_{ij} لكل صناعة j حيث $j = 1, \dots, n$.

أما المعادلة (2) فتوضِّح أن الصناعة j تبني إنتاجها مما تشتريه من خامات من كل صناعة i (حيث $i = 1, \dots, m$)، ومما تضيفه من خدمات عناصر الإنتاج (أي القيمة المضافة فيها) I_j [Koopmans, 1957 and Leontief, 1951].

(٧ ـ ٢) مصفوفة المعاملات

يمكن التعبير عن المعادلتين (1) ، (2) أعلاه لكل صناعات الاقتصاد (وعددها m) باستخدام مصفوفة تسمى مصفوفة المعاملات، كما هو واضح في الجدول رقم (٧ ـ ١)، فتعبِّر صفوف هذا الجدول عن المعادلة (1) بينما تعبِّر الأعمدة عن المعادلة (2).

جدول رقم (٧ ـ ١). مصفوفة المعاملات

بناء المنتج	تصريف المنتج				الطلب النهائي	إجمالي الإنتاج
	X_1	X_2	....	X_m		
X_1	x_{11}	x_{12}	....	x_{1m}	Y_1	X_1
X_2	x_{21}	x_{22}	....	x_{2m}	Y_2	X_2
.	.	.	....	.	.	
.	.	.	....	.	.	
.	.	.	....	.	.	
X_m	x_{m1}	x_{m2}	....	x_{mm}	Y_m	X_m
القيمة المضافة	I_1	I_2	....	I_m	$\sum_{i=1}^{m} I_i = \sum_{j=1}^{m} I_j$	
إجمالي الإنتاج	X_1	X_2	....	X_m		$\sum_{i=1}^{m} I_j$

جدول رقم (٧ ـ ٢). مصفوفة المعاملات لاقتصاد ذي ثلاث قطاعات.

بناء المنتج	تصريـــف المنـــتج			الطلـب النهائي	إجمالي الإنتاج
	X_1	X_2	X_3		
X_1	100	300	100	500	1000
X_2	100	200	500	1200	2000
X_3	50	250	100	600	1000
القيمة المضافة	750	1250	300	2300	
إجمالي الإنتاج	1000	2000	1000		4000

ويمكن توضيح الفكـرة باستخـدام مثال رقمي لاقتصاد مبسط جدًّا، كما هو مصوّر في الجدول رقم (٧ ـ ٢)، فيوضِّح هذا الجدول أن القطاع X_1 استخدم ما قيمته مائة مليون من إنتاجه كمادة خام للإنتاج المقبل، وأنه اشترى ما قيمته مائة مليون من إنتاج القطاع X_2 ، وما قيمته خمسون مليونًا من إنتاج القطاع X_3 ، وقد أضاف القطاع X_1 ما قيمته سبعمائة وخمسون مليونًا لإنتاج ما قيمته ألف مليون. ويوضِّح الجدول رقم (٧ ـ ٢) أن القطاع X_1 قد قام بتصريف إجمالي إنتاجه عن طريق بيع ما قيمته ثلاثمائة مليون إلى القطاع X_2 ، وما قيمته مائة مليون للقطاع X_3 ، وما قيمته خمسمائة مليون للقطاع النهائي واستخدم ما قيمته مائة مليون كمادة خام لإنتاجه الخاص.

ويمكننا بالطريقة نفسها شرح تكوين وتصريف منتجات القطاعات الأخرى.

ويلاحظ أن إجمالي القيمة المضافة تساوي إجمالي الطلب النهائي أو:

$$\sum_{i=1}^{m} Y_i = \sum_{j=1}^{m} I_j$$

وهو ما يعرف بإجمالي الناتج المحلي أو:

$$GDP = \sum_{i=1}^{m} Y_i = \sum_{j=1}^{m} I_j$$

ويمكن إثبات أن مجموع القيم المضافة يساوي مجموع الطلب النهائي في حالة اقتصاد ذي قطاعين كالآتي:

بتطبيق المعادلتين (1) ، (2) نحصل بالنسبة للقطاع X_1 على:

$$X_1 = x_{11} + x_{21} + I_1 \quad (3)$$

$$X_1 = x_{11} + x_{12} + Y_1 \quad (4)$$

ونحصل بالنسبة للقطاع X_2 على:

$$X_2 = x_{12} + x_{22} + I_2 \quad (5)$$

$$X_2 = x_{21} + x_{22} + I_2 \quad (6)$$

ومن المعادلتين (3) ، (4) نحصل على:

$$x_{11} + x_{21} + I_1 = x_{11} + x_{12} + Y_1 \quad (7)$$

ومن المعادلتين (5) ، (6) نحصل على:

$$x_{12} + x_{22} + I_2 = x_{21} + x_{22} + Y_2 \quad (8)$$

وباختصار المعادلة (7) نحصل على:

$$x_{21} - x_{12} = Y_1 - I_1 \quad (9)$$

وباختصار المعادلة (8) نحصل على:

$$x_{12} - x_{21} = Y_2 - I_2 \quad (10)$$

ونجمع المعادلتين (9) ، (10) فنحصل على:

$$Y_1 - I_1 + Y_2 - I_2 = 0 \quad (11)$$

أو:

$$Y_1 + Y_2 = I_1 + I_2 \qquad (12)$$

ويتضح من المعادلة الأخيرة أن :

$$\sum_{i=1}^{2} Y_i = \sum_{j=1}^{2} I_j$$

ويمكن تعميم الإثبات لعدد m من القطاعات لنحصل على :

$$\sum_{i=1}^{m} Y_i = \sum_{j=1}^{m} I_j$$

(٧ ـ ٣) مصفوفة المعاملات الفنية

يمكن أن ننظر إلى الجدول رقم (٧ ـ ٢) بطريقة أخرى. فيوضِّح العمود الأول في هذا الجدول أنه لإنتاج ما قيمته ١٠٠٠ وحدة نقدية أسهم القطاع x_1 بنسبة من هذه القيمة تساوي :

$$\frac{x_{11}}{X_1} = \frac{100}{1000} = 0.10$$

وأسهم القطاع X_2 بنسبة قدرها :

$$\frac{x_{21}}{X_1} = \frac{100}{1000} = 0.10$$

بينما أسهم القطاع X_3 بنسبة قدرها :

$$\frac{x_{31}}{X_1} = \frac{50}{1000} = 0.05$$

وهكذا فإن القيمة المضافة لهذا القطاع تصبح مساوية :

$$I_1 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{3} x_{i1}}{X_1} = 1 - \frac{250}{1000} = \frac{750}{1000} = 0.75$$

ويلاحظ أن :

$\frac{x_{11}}{X_1}$ تمثِّل ما استخدمه القطاع X_1 من إنتاجه كنسبة لجملة هذا الإنتاج .

$\frac{x_{21}}{X_1}$ تمثِّل ما اشتراه القطاع X_1 من القطاع X_2 كنسبة من إجمالي إنتاج القطاع X_1.

$\frac{x_{31}}{X_1}$ تمثِّل ما اشتراه القطاع X_1 من منتجات القطاع X_3 كنسبة من إجمالي إنتاج القطاع X_1.

وبصفة عامة فإن :

$\frac{x_{i1}}{X_1}$ تمثِّل ما اشتراه القطاع X_1 من منتجات القطاع X_i كنسبة من إجمالي إنتاج القطاع X_1.

وبمعنى آخر فإن :

$\frac{x_{i1}}{X_1}$ = ما باعه القطاع X_i للقطاع X_1 كنسبة من إنتاج القطاع X_1.

$\frac{x_{ij}}{X_j}$ = ما باعه القطاع X_i للقطاع X_j كنسبة من إنتاج القطاع X_j.

فلو افترضنا أن :

$$a_{i1} = \frac{x_{i1}}{X_1}$$

فإن :

$$x_{i1} = a_{i1} X_1$$

(لقيم $i = 1, \ldots, m$)

وبصفة عامة :

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}$$

أو:

$$x_{ij} = a_{ij} X_j$$

وتسمى كل نسبة (a_{ij}) بمعامل المدخل الحدِّي أو معامل المدخل.

ويمكن بناء جدول يوضِّح معاملات جميع الصناعات، ويسمى هذا الجدول بمصفوفة المعاملات الفنية كما يتضح من الجدول رقم (٧ ـ ٣). ويعطي الجدول رقم (٧ ـ ٤) مصفوفة المعاملات الفنية الخاصة بالاقتصاد المبسط الذي يمثِّل معاملاته الجدول رقم (٧ ـ ٢).

جدول رقم (٧ ـ ٣). مصفوفة المعاملات الفنية

القطاعات	القطاعات			
	X_1	X_2	. . .	X_m
X_1	a_{11}	a_{12}	. . .	a_{1m}
X_2	a_{21}	a_{22}	. . .	a_{2m}
.	.			
.	.			
.	.			
X_m	a_{m1}	a_{m2}	. . .	a_{mm}
القيمة المضافة	$(1-\sum_{i=1}^{m} a_{ij})$	$(1-\sum_{i=1}^{m} a_{i2})$	. . .	$(1-\sum_{i=1}^{m} a_{im})$
المجموع	1	1	. . .	1

(٧ ـ ٤) استخدام المصفوفات في حلِّ جداول المدخلات والمخرجات

يتضح مما سبق أنه بالنسبة لأي صناعة i نحصل على :

$$X_i = Y_i + \sum_{j=1}^{m} x_{ij} \qquad ; i=1 ,\ldots, m$$

وباستخدام معاملات المدخلات يمكننا التعبير عن المعادلة هذه كالآتي :

$$X_i = Y_i + \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \; X_j$$

جدول رقم (٧ ـ ٤). مصفوفة المعاملات الفنية الخاصة بمصفوفة المعاملات في الجدول رقم (٧ ـ ٢)

القطاعات	القطاعـــات		
	X_1	X_2	X_3
X_1	0.100	0.150	0.100
X_2	0.100	0.100	0.500
X_3	0.050	0.125	0.100
القيمة المضافة	0.750	0.625	0.300
المجمـــوع	1.000	1.000	1.000

وهكذا نحصل لجميع الصناعات على العلاقات :

$$X_1 = a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + \ldots + a_{1m} X_m + Y_1$$
$$X_2 = a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + \ldots + a_{2m} X_m + Y_2$$
$$\vdots$$
$$X_m = a_{m1} X_1 + a_{m2} X_2 + \ldots + a_{mm} X_m + Y_m$$

ويمكن التعبير عن هذه العلاقات بطريقة أخرى:

$$Y_1 = (1 - a_{11}) X_1 - a_{12} X_2 - \ldots - a_{1m} X_m$$
$$Y_2 = - a_{21} X_1 + (1 - a_{22}) X_2 - \ldots - a_{2m} X_m$$
$$\vdots$$
$$Y_m = - a_{m1} X_1 - a_{m2} X_2 - \ldots + (1 - a_{mm}) X_m$$

وباستخدام المصفوفات نعبّر عن نظام المعادلات أعلاه كالآتي:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \\ . \\ . \\ Y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-a_{11}) & -a_{12} & \ldots & -a_{1m} \\ -a_{21} & (1-a_{22}) & \ldots & -a_{2m} \\ & & & \\ . & . & & \\ . & . & & \\ -a_{m1} & -a_{m2} & \ldots & (1-a_{mm}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \\ . \\ . \\ X_m \end{bmatrix}$$

وباستخدام مصفوفة الوحدة I من درجة n × m يمكن إعادة كتابة النظام أعلاه كالآتي:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ . \\ . \\ . \\ Y_m \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 1 & .. & 0 \\ . & & & \\ . & & & \\ . & & & \\ 0 & 0 & .. & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & .. & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & .. & a_{2m} \\ . & & & \\ . & & & \\ . & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & .. & a_{mm} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ . \\ . \\ . \\ X_m \end{bmatrix}$$

ويمكن اختصار هذه العلاقات كالآتي :

$$Y = (I - A) X$$

حيث Y تمثّل متّجه الطلب النهائي ، X متّجه إجمالي الإنتاج وحيث A تمثّل مصفوفة المعاملات الفنية وحيث I مصفوفة الوحدة من درجة مناسبة .

فإذا كانت المصفوفة A غير منفردة أمكن إيجاد مقلوبها ومن المعادلة أعلاه نحصل على :

$$(I - A)^{-1} Y = (I - A)^{-1} (I - A) X$$

أي أن :

$$(I - A)^{-1} Y = 1 X$$

وهكذا فإن :

$$X = (I - A)^{-1} Y$$

وتوضّح هذه المعادلة الأخيرة أنه في الإمكان تقدير قيمة الإنتاج الكلي في الصناعات المختلفة الذي يحقّق طلبًا نهائيًا معينًا .

ويمكن توضيح ذلك بالمثال الآتي :

مثال

نفترض أن هناك اقتصادًا بسيطًا جدًّا يتكون من ثلاثة قطاعات ، وأن مصفوفة المعاملات الفنية في هذا الاقتصاد يمثّلها الجدول الآتي :

جدول رقم (٧ ـ ٥) . مصفوفة المعاملات الفنية لاقتصاد مبسط

القطاعات	القطاعات		
	X_1	X_2	X_3
X_1	0.4	0.1	0.1
X_2	0.1	0.4	0.1
X_3	0.1	0.1	0.4

لنفترض أن المخططين يهدفون إلى تحقيق طلب نهائي على سلع القطاعات الثلاثة كالآتي :

القطاع	الهدف
X_1	700
X_2	2100
X_3	1400

وتكون المشكلة إيجاد مستويات إنتاج القطاعات الثلاثة التي تحقق هذه الأهداف.

(١) نقوم أولاً بحساب $(I - A)$.

حيث إن :

$$A = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.4 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.4 \end{bmatrix}$$

نحصل على :

$$(I-A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0.4 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.4 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0.6 & -0.1 & -0.1 \\ -0.1 & 0.6 & -0.1 \\ -0.1 & -0.1 & 0.6 \end{pmatrix}$$

(٢) نقوم بعد ذلك بحساب $(I-A)^{-1}$ فنحصل على:

$$(I-A)^{-1} = \begin{pmatrix} 25/14 & 5/14 & 5/14 \\ 5/14 & 25/14 & 5/14 \\ 5/14 & 5/14 & 25/14 \end{pmatrix}$$

بتطبيق المعادلة $X=(I-A)^{-1}Y$ نحصل على:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25/14 & 5/14 & 5/14 \\ 5/14 & 25/14 & 5/14 \\ 5/14 & 5/14 & 25/14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 700 \\ 2100 \\ 1400 \end{pmatrix}$$

وهكذا نحصل على:

$$X_1 = 2500$$
$$X_2 = 4500$$
$$X_3 = 3500$$

أي أن الهدف الذي يسعى إليه المخططون سوف يتحقق إذا ما أنتج القطاع X_1 ما قيمته **٢٥٠٠** وحدة نقدية وأنتج القطاع X_2 ما قيمته **٤٥٠٠** وحدة نقدية وأنتج القطاع X_3 ما قيمته **٣٥٠٠** وحدة نقدية.

(٧ ـ ٥) مضاعفات المدخلات والمخرجات

يمكننا استخدام جداول المدخلات والمخرجات في حساب أثر تغيّر الطلب النهائي بمقدار وحدة واحدة على إنتاج كل قطاع (أو صناعة) وعلى الإنتاج الكلي.

فلو افترضنا في مثالنا السابق أن الطلب النهائي على منتجات القطاع X_1 زاد بمقدار وحدة واحدة؛ أي زاد من 700 إلى 701 ، فإن هذا سوف يؤدي إلى تغيّرات في

قيمة الناتج الإجمالي لجميع القطاعات، وليس فقط في قيمة الإنتاج الإجمالي للقطاع X_1 ، وذلك بسبب التداخل بين القطاعات، ويمكن حساب هذه الزيادات بتطبيق المعادلة :

$$X = (I - A)^{-1} Y$$

فنحصل على :

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25/14 & 5/14 & 5/14 \\ 5/14 & 25/14 & 5/14 \\ 5/14 & 5/14 & 25/14 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 701 \\ 2100 \\ 1400 \end{pmatrix}$$

وبالحلِّ نحصل على مستويات الإنتاج الجديدة :

$$X_1 = 2501 . 7857$$

$$X_2 = 4500 . 35714$$

$$X_3 = 3500 . 35714$$

ويتضح من هذه المستويات أن زيادة الطلب النهائي على منتجات القطاع X_1 غيّرت من إنتاج هذا القطاع (حيث زاد هذا الإنتاج من 2500 إلى 7857 . 2501)، ومن إنتاج القطاعات الأخرى بسبب التداخل بين النشاطات المختلفة. ويمكن حساب الأثر الكلي (أو قيمة مضاعف القطاع X_1) بجمع الزيادات التي حدثت في كل القطاعات. أي أن مضاعف القطاع X_1 (k_{x_1}) يكون مساويًا :

$$k_{X1} = 1.7857 + 0.35714 + 0.35714 = 2.49998$$

وبناءً عليه فإن زيادة الطلب النهائي بمقدار وحدة واحدة على منتجات القطاع X_1 أدَّت إلى زيادة في مجمل إنتاج جميع القطاعات بمقدار 2.5 وحدة تقريبًا. وبذلك يكون مضاعف القطاع X_1 يساوي 2.5.

ويمكننا حساب هذا المضاعف مباشرة من المصفوفة $(I - A)^{-1}$ ؛ إذ يمثّل

مجموع أرقام كل عمود في هذه المصفوفة مضاعف القطاع الذي يقع تحت هذا العمود [Thomas, 1982].

فمضاعف القطاع X_3 مثلاً يمثله مجموع الأرقام التي تقع في العمود الثالث من المصفوفة $(I - A)^{-1}$.

ويمكننا توضيح كيفية حساب المضاعفات من المصفوفة $(I - A)^{-1}$ بمثال آخر. فلو افترضنا مصفوفة المعاملات الفنية A في الجدول رقم (٧ ـ ٦)، وافترضنا أن الطلب النهائي الحالي على منتجات القطاعات كالآتي :

القطاع	الطلب النهائي
X_1	75
X_2	15
X_3	130

جدول رقم (٧ ـ ٦). مصفوفة المعاملات الفنية لاقتصاد مبسط

القطاعات	القطاعات		
	X_1	X_2	X_3
X_1	0.1667	0.25	0.25
X_2	0.25	0.25	0.3333
X_3	0.5	0.3333	0.3333

ومن مصفوفة المعاملات الفنية نحصل على :

$$(I-A) = \begin{pmatrix} 0.8333 & -0.25 & -0.25 \\ -0.25 & 0.75 & -0.3333 \\ -0.5 & -0.3333 & 0.6667 \end{pmatrix}$$

ومن هذه المصفوفة نحصل على :

$$(I-A)^{-1} = \begin{pmatrix} 3.08 & 1.98 & 2.15 \\ 2.64 & 3.41 & 2.70 \\ 3.63 & 3.19 & 4.46 \end{pmatrix}$$

وباستخدام أرقام الطلب النهائي المعطاة نحصل على مستويات الإنتاج لكل قطاع كالآتي :

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.08 & 1.98 & 2.15 \\ 2.64 & 3.41 & 2.70 \\ 3.63 & 3.19 & 4.46 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 75 \\ 15 \\ 130 \end{pmatrix}$$

بالحلِّ نحصل على :

$$X_1 = 540$$
$$X_2 = 600$$
$$X_3 = 900$$

نفترض الآن زيادة الطلب النهائي على إنتاج القطاع X_2 بمقدار وحدة نقدية واحدة، والمطلوب تحديد أثر هذه الزيادة على الإنتاج الإجمالي للقطاعات المختلفة .

باستخدام المعادلة :

$$X = (I-A)^{-1} Y$$

نحصل على :

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.08 & 1.98 & 2.15 \\ 2.64 & 3.41 & 2.70 \\ 3.63 & 3.19 & 4.46 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 15 \\ 16 \\ 130 \end{pmatrix}$$

وبالحل نحصل على :

$$X_1 = 41 . 98$$

$$X_2 = 603 . 41$$

$$X_3 = 903 . 19$$

ويتضح أن زيادة الطلب النهائي على إنتاج القطاع X_2 أدت إلى زيادة في إجمالي إنتاج جميع القطاعات كالآتي :

$$\Delta X_1 = 1.98$$

$$\Delta X_2 = 3.41$$

$$\Delta X_3 = \underline{3.19}$$

$$\sum_{i=1}^{3} \Delta X_i = 8.58$$

ويلاحظ الآتي :

(i) إن زيادة الطلب النهائي على إنتاج القطاع X_2 بمقدار وحدة واحدة أدت إلى زيادة الإنتاج الإجمالي للقطاع X_1 بمقدار 1.98 ؛ أي أن :

$$k_{12} = \frac{\Delta X_1}{\Delta Y_2} = 1.98$$

كما أدت زيادة الطلب النهائي على منتجات القطاع X_2 إلى زيادة إجمالي إنتاج القطاع X_2 بمقدار 3.41 ، وإلى زيادة إجمالي إنتاج القطاع X_3 بمقدار 3.19 ؛ أي أن :

$$k_{22} = \frac{\Delta X_2}{\Delta Y_2} = 3.41$$

$$k_{32} = \frac{\Delta X_3}{\Delta Y_2} = 3.19$$

وبالرجوع إلى المصفوفة $(I - A)^{-1}$ نجد أن k_{12} عبارة عن قيمة العنصر a_{12} في هذه المصفوفة، وأن المضاعف k_{22} يمثله العنصر a_{22} في المصفوفة $(I - A)^{-1}$.

وبصفة عامة نجد أن k_{ij} يمثله العنصر a_{ij} في المصفوفة المذكورة، وهكذا فإنه يمكننا حساب أثر زيادة الطلب النهائي على أي قطاع على الإنتاج الإجمالي لباقي القطاعات.

فلو زاد الطلب النهائي على إنتاج القطاع X_3 بمقدار ١٠ مثلاً فإن أثر ذلك على إجمالي إنتاج القطاع X_1 يكون مساويًا

$$\Delta X_1 = 10 \,.\, k_{31}$$

حيث k_{31} يمثلها العنصر a_{31} في المصفوفة $(I - A)^{-1}$، وبذلك يكون لدينا

$$\Delta X_1 = 10\,(3.36) = 36.3$$

(ii) أدَّت زيادة الطلب النهائي على إنتاج القطاع X_2 إلى زيادة في إجمالي ناتج القطاعات الثلاثة قدرها 8.58 وحدة.

وبالرجوع إلى المصفوفة $(I - A)^{-1}$ نجد أن هذه الزيادة (8.58) تساوي مجموع عناصر العمود الثاني في المصفوفة، وهذا معناه أن مضاعف *القطاع الثاني* (بالنسبة للاقتصاد ككل) يساوي مجموع عناصر *العمود الثاني* في المصفوفة $(I - A)^{-1}$.

وبصفة عامة فإن مضاعف القطاع X_j يساوي مجموع عناصر العمود j في المصفوفة $(I - A)^{-1}$ ؛ أي أن :

$$k_j = a_{1j} + a_{2j} + \dots + a_{mj}$$

$$k_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}$$

في المصفوفة $(I - A)^{-1}$.

وهكذا إذا زاد إنتاج القطاع X_1 مثلاً بمقدار ΔX_1 فإن هذا سوف يؤدي إلى زيادة في إجمالي جميع الصناعات بمقدار

$$\Delta X = \Delta X_1 + \Delta X_2 + \ldots + \Delta X_m$$

$$\Delta X = \sum_{j=1}^{m} \Delta X_j$$

أي أن

$$\begin{aligned} \Delta X &= \Delta X_1 k_1 \\ &= \Delta X_1 \sum a_{ij} \end{aligned}$$

حيث تكون a_{ij} العنصر الواقع في الصف i والعمود j في المصفوفة $(I - A)^{-1}$.

ومن هذا يتضح كيف يمكن استخدام عناصر المصفوفة $(I - A)^{-1}$ في حساب المضاعفات سواء بالنسبة لأي قطاع معينً أو بالنسبة لقطاعات الاقتصاد كلها [Bruckmann, 1980 and Dorfman, 1958].

(٧ ـ ٦) تمرينات

١) افترض أن اقتصادًا ما يتكون من ٣ قطاعات X_1, X_2, X_3 ، وأن معاملات هذا الاقتصاد يمثِّلها الجدول الآتي :

احسب مستويات الإنتاج لكل قطاع اللازمة لتحقيق طلب نهائي قدره ١٢٠ للقطاع X_1 ، ٤٠ للقطاع X_2 ، ١٥ للقطاع X_3 . احسب المضاعفات لكل من القطاعات الثلاثة.

مصفوفة المعاملات

القطاعات المنتجة	القطاعـــات المستلمـــة			الطلب النهائي	إجمالي الإنتاج
	X_1	X_2	X_3		
X_1	80	100	100	40	320
X_2	80	200	60	60	400
X_3	80	100	100	20	300

٢) تمثِّل المصفوفة الآتية مصفوفة المعاملات الفنية

مصفوفة المعاملات الفنية

$$A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.3 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 & 0.4 \\ 0.2 & 0.3 & 0.1 \end{bmatrix}$$

فإذا كان الطلب النهائي على منتجات القطاعات الثلاثة كالآتي :

$$Y = \begin{pmatrix} 10 \\ 15 \\ 6 \end{pmatrix}$$

احسب مستويات الإنتاج التي تقابل الطلب واستنتج المضاعفات .

٣) تمثِّل المصفوفة الآتية مصفوفة المعاملات الفنية :

$$A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.3 \\ 0.5 & 0 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.1 \end{bmatrix}$$

احسب مستويات الإنتاج لكل قطاع المقابلة لطلب نهائي قدره مائة للقطاع X_1 ، أربعون للقطاع X_2 ، وخمسون للقطاع X_3.

٤) يمثِّل الجدول الآتي مصفوفة المعاملات في اقتصاد مبسَّط ذي ٣ قطاعات :

مصفوفة المعاملات

القطاعات المنتجة	القطاعات المستلمة X_1	X_2	X_3	الطلب النهائي	إجمالي الإنتاج
X_1	480	70	100	150	800
X_2	80	420	100	100	700
X_3	80	70	600	250	1000

احسب الناتج الكلي لكل قطاع إذا زاد الطلب النهائي على سلع كل قطاع بمقدار عشر وحدات. احسب المضاعفات.

٥) احسب من المعلومات الآتية مستوى الإنتاج الكلي لكل من قطاعات الاقتصاد والمضاعفات.

$$A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 & 0.2 \\ 0.1 & 0.6 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.6 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \\ 200 \end{bmatrix}$$

الباب الثاني

النظرية الاقتصادية الكلية

● مُحَدَّدات الدخل القومي ● المضاعفات ● الاستهلاك ● الاستثمار ● توازن الطلب الكلي ● العرض الكلي والتوازن الكلي ● التوازن الكلي والسياسات الاقتصادية

الفصل الثامن

محددات الدخل القومي

(٨ ـ ١) تعاريف

يمكن تعريف الدخل القومي بعدد من الطرق، فمن حيث مصدره يعرف بأنه مجموع القيم المضافة لجميع قطاعات المجتمع الإنتاجية؛ فإذا كان لدينا عدد n من القطاعات، وكانت قيمها المضافة هي على التوالي $V_1, V_2, \ldots, V_n$ ، فإن الدخل القومي (أو قيمة الناتج القومي) يساوي:

$$Y = V_1 + V_2 + \ldots + V_n$$

$$Y = \sum_{i=1}^{n} V_i \qquad (1)$$

ويمكن أيضًا تعريف الدخل القومي تبعًا لطريقة توزيعه؛ إذ يساوي مجموع عوائد عناصر الإنتاج من أجور (ورواتب) وإيجارات وفوائد وأرباح. فإذا رمزنا للأجور والرواتب بالرمز W ، وللإيجارات بالرمز R ، وللفوائد بالرمز S ، وللأرباح بالرمز D ، فإن الدخل القومي يساوي:

$$Y = W + R + S + D \qquad \ldots (2)$$

كما يمكن تعريف الدخل القومي تبعًا لطريقة التصرف فيه، وفي هذه الحالة يساوي الدخل القومي مجموع الإنفاق الكلي، ويمكن تقسيم هذا الإنفاق إلى إنفاق استهلاكي خاص (C) ، وإنفاق استثماري (I) ، وإنفاق حكومي (G) ، وصادرات (X) ، وواردات (M) ، فيصبح الدخل القومي (أو قيمة الناتج القومي) مساويًا:

$$Y = C + I + G + X - M \qquad \ldots (3)$$

كل علاقة من العلاقات أعلاه عبارة عن متطابقة ؛ فالعلاقة الأخيرة مثلاً توضِّح أن ما يستلمــه الأفــراد من دخــول خلال فترة زمنية معيَّنــة إمـا ينفق على السلع الاستهلاكية، أو السلع الاستثمارية، أو تحصله الحكومة وتنفقه بمعرفتها أو ينفق على السلع الأجنبية، كما أن جزءًا من هذه الدخول يتحقق نتيجة إنفاق الأجانب على السلع الوطنية [Kelly, 1981].

ولا تمثِّل أي من العلاقات أعلاه معادلات سلوكية، ومن ثم لا تساعد في تحديد مستوى الدخل التوازني، أو مساره الزمني [Sage, 1983].

(٨ ـ ٢) نماذج مبسطة للاقتصاد الكلي

(٨ ـ ٢ ـ ١) اقتصاد ذو قطاعين بدون استثمار

يعتبر هذا النموذج من أبسط أنواع الاقتصاديات، ويحتوي على قطاعين هما قطاع الأفراد وقطاع المنشآت. فيقدم الأفراد خدماتهم الإنتاجية للمنشآت، ويحصلون مقابل ذلـك على عوائـد يمثل مجموعها الدخل القومي، وتقوم المنشآت باستخدام عناصر الإنتاج في إنتاج سلع وخدمات تعرضها في الأسواق للبيع مقابل أثمان، فتحصل على قيمـة الناتج القومي، أو العرض الكلي، وتساوي هذه القيمة الدخل القومي الذي حصلت عليه عناصر الإنتاج (بما في ذلك أرباح المنشآت) ؛ أي أن :

قيمة الناتج القومي ≡ العرض الكلي ≡ الدخل القومي

$$Y = PQ \quad \dots (1)$$

حيث Y = الدخل القومي

P = المستوى العام للأسعار

Q = الناتج الكلي من السلع والخدمات

وحيث إننا قد افترضنا عدم وجود استثمار فإن جميع الدخل القومي سوف ينفق

(طبقًا لهذا النموذج) على السلع الاستهلاكية، فلو رمزنا للاستهلاك بالرمز C فإننا نحصل على :

$$Y = C \qquad \dots (2)$$

ويتضح أن مثل هذا الاقتصاد يتمتع بالتوازن *دائمًا* حيث إن ما ينتج يستهلك بالكامل. إلا أنه اقتصاد مبسط للغاية ويبتعد كل البعد عن الحياة الواقعية [Kogiku, 1968].

(٨ ـ ٢ ـ ٢) اقتصاد ذو قطاعين مع وجود استثمار

طبقًا لهذا النموذج لا ينفق الأفراد كل الدخل القومي على السلع الاستهلاكية، وإنما يدخرون جزءًا منه؛ ومن ثم نحصل من متطابقة الدخل على :

$$Y = C + S \qquad \dots (1)$$

حيث S تمثّل المدخرات.

أما الإنتاج فيمثّل سلعًا استهلاكية وسلعًا استثمارية (I)، وهكذا نحصل من معادلة الإنفاق الكلي على :

$$Y = C + I \qquad \dots (2)$$

ويتضح من المعادلتين (١)، (٢) أن

$$S_{\text{ex post}} = I_{\text{ex post}} \qquad \dots (3)$$

أي أن الادخار *المحقق* يساوي دائمًا الاستثمار *المحقق* في اقتصاد ذي قطاعين. إلا أن هذا ليس معناه بالضرورة أن الاقتصاد في حالة توازن، فالادخار *المخطط* قد لا يساوي الاستثمار *المخطط*، وفي هذه الحالة يجبر قطاع المنشآت على زيادة أو نقص المخزون بكميات تزيد عما يرغب فيه [Zeuthen, 1955].

وتمثّل الزيادة الإجبارية والنقص الإجباري في المخزون استثمارًا غير مخطط وتشير إلى وجود حالة عدم توازن في الاقتصاد [Kennedy, 1984].

وبمعنى آخر فإن التوازن يتطلب أن يتساوى الإنفاق الكلي المخطط الذي يمثِّل الطلب الكلِّي مع قيمة الناتج القومي (والذي يمثِّل الدخل القومي)؛ أي أن:

$$\hat{E} = Y \qquad \dots (4)$$

$$\hat{E} = C + \hat{I} \qquad \dots (5)$$

حيث $\hat{E}$ = الإنفاق الكلِّي المخطط (أو الطلب الكلي)

$\hat{I}$ = الاستثمار المخطط

ولما كان الدخل القومي يساوي مجموع الاستهلاك والادخار المخطط ($\hat{S}$) فإننا نحصل على:

$$Y = C + \hat{S} \qquad \dots (6)$$

ومن المعادلتين (5) ، (6) نحصل على:

$$\hat{S} = \hat{I} \qquad \dots (7)$$

وإذا زاد الادخار المخطط عن الاستثمار المخطط تراكم المخزون فيضطر المنتجون إلى تقليل إنتاجهم في العام المقبل، فيقل الدخل القومي، وينقص الادخار حتى يساوي الاستثمار المخطط، ويحدث العكس لو كان الادخار المخطط أقل من الاستثمار المخطط.

هذا وسوف نفترض في تحليلنا المقبل عدم وجود استثمار غير مخطط، ما لم ينص على غير ذلك صراحةً.

(٨ ـ ٢ ـ ٣) اقتصاد ذو ثلاثة قطاعات

إذا أدخلنا القطاع الحكومي في النظام الاقتصادي فإن هذا سوف يغيّر من معادلة الإنفاق الكلي، وكذلك معادلة التصرف في الدخل؛ فتصبح معادلة الإنفاق الكلي مساوية:

$$Y = C + I + G \qquad \dots (1)$$

وتصبح معادلة التصرف في الدخل مساوية :

$$Y = C + S + T \qquad \dots (2)$$

حيث G = الإنفاق الحكومي

T = الضرائب.

فإذا افترضنا عدم وجود استثمار غير مخطط حصلنا عند التوازن على :

$$S + T = I + G \qquad \dots (3)$$

ويتضح من هذه المعادلة الأخيرة أن التوازن في حالة اقتصاد ذي ثلاثة قطاعات يتحقق عندما يتساوى مجموع المدخرات والضرائب مع مجموع الاستثمار والإنفاق الحكومي . ولا يشترط هنا أن يكون الادخار المخطط مساويًا للاستثمار المخطط ؛ إذ أن التوازن يتطلب أن يتساوى مجموع الاحتقان الذي يمثله الإنفاق الاستثماري والإنفاق الحكومي مع مجموع التسرب الذي يمثله الادخار والضرائب.

(٨ ـ ٢ ـ ٤) اقتصاد ذو أربعة قطاعات

إذا أدخلنا القطاع الخارجي في الصورة فإن ذلك سوف يؤثِّر في كمِّيات التسرب والاحتقان ؛ إذ تمثِّل الصادرات احتقانًا للطلب الكلي يسببه إنفاق الأجانب على السلع الوطنية بينما تمثِّل الواردات تسربًا من الطلب الكلِّي بسبب إنفاق المواطنين على السلع الأجنبية ، فنحصل من معادلة الإنفاق على :

$$Y = C + I + G + X - M \qquad \dots (1)$$

ونحصل من معادلة التصرف في الدخل على :

$$Y = C + S + T \qquad \dots (2)$$

ومن المعادلة (1) نحصل على :

$$Y - C = I + G + X - M \qquad \dots (3)$$

بينما نحصل من المعادلة (2) على :

$$Y - C = S + T \qquad \dots (4)$$

فإذا افترضنا عدم وجود استثمار غير مخطط، أي افترضنا أن الطلب الكلي يساوي قيمة الناتج القومي، فإننا نحصل من المعادلتين (3) و (4) على شرط التوازن في حالة اقتصاد ذي أربعة قطاعات، ويتلخص هذا الشرط في أن :

$$I + G + X = S + T + M \qquad \dots (5)$$

ويعطي الجانب الأيسر لهذه المعادلة مجموع الاحتقان، بينما يعطي الجانب الأيمن مجموع التسرب، ويتضح أنه إذا كان الميزان التجاري في حالة توازن، أي :

$$X = M \qquad \dots (6)$$

فإن شرط التوازن في حالة اقتصاد ذي أربعة قطاعات يؤول إلى شرط التوازن في حالة اقتصاد ذي ثلاثة قطاعات؛ حيث إن المعادلة رقم (5) تصبح :

$$I + G = S + T$$

وهو ما سبق أن حصلنا عليه كشرط التوازن في حالة اقتصاد ذي ثلاثة قطاعات.

كما يلاحظ أنه لو كان الميزان التجاري في حالة توازن، وكانت ميزانية الحكومة في حالة توازن أيضًا؛ أي لو كان لدينا :

$$G = T$$

وأيضًا :

$$M = X$$

فإن شرط التوازن في حالة الاقتصاد المفتوح يؤول إلى شرط التوازن في حالة اقتصاد ذي قطاعين (مع وجود استثمار)؛ حيث يتطلب التوازن

$$I = S$$

بشرط عدم وجود استثمار غير مخطط [Samuelson, New York 1948].

(٨ ـ ٣) مُحدِّدات الإنفاق الكلِّي

يتضح مما سبق أن الدخل القومي يتكون من عناصر الإنفاق الآتية:

ا ـ الإنفاق الاستهلاكي الخاص.
ب ـ الإنفاق الاستثماري الخاص.
جـ ـ الإنفاق الحكومي.
د ـ الصادرات ناقصًا الواردات.

وهكذا فإن التغيّرات التي تحدث في أي نوع من أنواع الإنفاق أعلاه سوف تؤدِّي إلى تغيّرات في مستوى الدخل القومي [إبراهيم، ١٩٧٩م].

وسوف نرى في الفصل القادم أن الدخل المتاح (أي الدخل القومي ناقصًا الضرائب زائدًا الإعانات، يعتبر المحدد الرئيسي للإنفاق الاستهلاكي الخاص أو:

$$C = C\,(Y_d) \qquad \ldots (1)$$

أما الإنفاق الاستثماري فيتوقف على سعر الفائدة وعلى تغيّرات الدخل؛ أي أن:

$$I = I\left(i, \frac{dY}{dt}\right) \qquad (2)$$

حيث i تمثِّل سعر الفائدة، وحيث $\frac{dY}{dt}$ تمثِّل معدّل التغيّر في الدخل.

وتعتبر تغيّرات الإنفاق الحكومي والضرائب من أدوات السياسة المالية التي

تستخدمها الحكومة في التأثير على مستوى الطلب الكلّي التوازني، وهكذا تعامل هذه المتغيّرات كمتغيّرات خارجية أو محددة خارج النظام.

ويقال الشيء نفسه عن الصادرات التي تتأثر بالطلب الخارجي على السلع الوطنية؛ ومن ثم يصعب التحكم فيها. أما بالنسبة للواردات فإنها تتوقف لدرجة كبيرة على الدخل القومي أو:

$$M = M(Y) \qquad \ldots (3)$$

إلا أن تأثيرها على الطلب الكلي يخالف تمامًا تأثير الصادرات؛ حيث إن الواردات، كما سبق أن رأينا، تمثّل تسربًا بينما تمثّل الصادرات احتقانًا.

(٨ - ٤) تمرينات

١) احسب من المعلومات الآتية مقدار الصادرات إذا كان الاقتصاد في حالة توازن:

الإنفاق الحكومي	= ٤٠ مليونًا
الضرائب	= ٣٠ مليونًا
الادخار	= ٧٠ مليونًا
الواردات	= ٧٠ مليونًا
الاستثمار	= ٦٠ مليونًا

٢) استخدم المعلومات الآتية في تقدير مستوى الدخل التوازني

$$C = 10 + 0.5\,Y_d$$

$$I = 60,\ G = 40,\ T = 0.30y$$

$$M = 5 + 0.2y,\ X = 50$$

٣) بافتراض دالة الاستهلاك

$$C = 40 + 0.8\,Y_d$$

ودالة الضرائب

$$T = 0 - 20\,Y$$

فإذا كان هنـــاك عجـز في الميزانية قدره ٢٠ مليونًـا، احسب مستـوى الإنفـاق الاستثماري، إذا كان الاقتصاد في حالة توازن.

٤) إذا كانت دالة الاستهلاك تساوي :

$$C = 60 + 0.50Y_d$$

وكان الاستثمار يساوي الإنفاق الحكومي، فإذا قررت الحكومة فرض ضريبة على المـدخـرات لسـد العجـز في ميزانيتهـا، احسب معدّل هذه الضريبة إذا كانت ضرائب الـدخل تساوي ١٠ بالمائة من الدخل، وكان العجز يساوي $\frac{١}{٤}$ قيمة حصيلة ضريبة الدخل.

٥) إذا كان الاستهلاك التلقائي يساوي الاستثمار التلقائي، ويساوي الضريبة، وكان الإنفاق الحكومي يساوي ١٥٠ مليونًا، والميل الحدِّي للاستهلاك يساوي ٧٥, ٠، احسب مستوى الدخل التوازني، إذا كان الاستهلاك التلقائي يساوي ١٠٪ من هذا الدخل.

الفصل التاسع

المضـاعفـات

(٩ ـ ١) تعـاريـف

تُعَـبِّرُ المضـاعفات في التحليل الاقتصادي الكلي عن معدَّل التغيّر في الدخل القـومي ، أو الـطلب الكلي بالنسبة لأنواع الإنفاق التلقائي المختلفة ، أو بارومترات النموذج ، ويمكن تحديد هذه المضاعفات بأخذ معامل التفاضل الجزئي للدخل القومي بالنسبة للإنفاق التلقائي المعينّ فنحصل على :

$$k_z = \frac{\partial Y}{\partial Z}$$

حيث k_z يمثِّـل مضـاعف الإنفاق التلقائي أو البارومتر Z ؛ فإذا كانت Z تمثِّل الإنفاق الحكومي مثلاً فإن k_z تمثِّل مضاعف الإنفاق الحكومي ، وإذا كانت Z تمثِّل معدّل ضريبة الدخل فإن k_z تشير إلى مضاعف معدّل الضريبة وهكذا .

وسـوف نتنـاول دراسـة المضـاعفات بالنسبة لاقتصاد مغلق يخلو من التدخل الحكومي ، وبالنسبة لاقتصاد مغلق مع التدخل الحكومي ثم بالنسبة لاقتصاد مفتوح ذي أربعة قطاعات .

(٩ ـ ٢) المضاعفات في اقتصاد مغلق مع عدم وجود تدخل حكومي

تكون متطابقة الدخل القومي في مثل هذا الاقتصاد مساوية :

$$Y = C + I \qquad \dots (1)$$

فإذا افترضنا أن الاستهلاك (C) دالة خطية للدخل فإننا نحصل على:

$$C = a + bY \quad \dots (2)$$

حيث a تمثّل الإنفاق الاستهلاكي التلقائي، وحيث b تمثّل الميل الحدّي للاستهلاك، مع مراعاة أن $a > 0; 0 < b < 1$.

وبافتراض أن الاستثمار يتحدد تلقائيًا نحصل على:

$$I = \bar{I} \quad \dots (3)$$

وبالتعويض من المعادلتين (2)، (3) في المعادلة (1) نحصل على:

$$Y = a + bY + \bar{I} \quad \dots (4)$$

ومن هذه المعادلة نحصل على:

$$Y - bY = a + \bar{I}$$

أو:

$$Y(1 - b) = a + \bar{I} \quad \dots (5)$$

وتعطي هذه المعادلة الأخيرة:

$$Y = \frac{1}{1-b}(a + \bar{I}) \quad \dots (6)$$

بأخذ التفاضل الجزئي للمتغيّر Y بالنسبة لكل من a ، $\bar{I}$ نحصل على المضاعفات الآتية:

ا) مضاعف الإنفاق الاستهلاكي التلقائي:

$$k_a = \frac{\partial Y}{\partial a} = \frac{1}{1-b} \quad \dots (7)$$

ب) مضاعف الاستثمار التلقائي:

$$k_{\bar{I}} = \frac{\partial Y}{\partial \bar{I}} = \frac{1}{1-b} \qquad \dots (8)$$

ويتّضح أن في هذا النموذج الاقتصادي المبسط وجود مضاعفين فقط وتكون قيمتاهما متساويتين [Henry, 1964].

(٩ ـ ٣) المضاعف الديناميكي

إذا افترضنا أن الاستثمار التلقائي زاد في الفترة t بمقدار ΔI_t فإنه سوف يتبع ذلك زيادة في الدخل القومي في الفترة t بمقدار ΔY_t ؛ إلا أن جزءًا من هذه الزيادة في الدخل سوف ينفق على الاستهلاك، ويصبح زيادة في دخول الأفراد في الفترة المقبلة، ويتوقف هذا الجزء على قيمة الميل الحدِّي للاستهلاك، وهكذا فإنه في الفترة t + 1 تكون الزيادة في الدخل مساوية :

$$\Delta Y_{t+1} = b\,\Delta I_t$$

ثم يستهلك جزء من هذه الزيادة الجديدة في الدخل، فتصبح دخولاً جديدة في الفترة t + 2 ؛ ومن ثم تصبح زيادة الدخل في الفترة t + 2 مساوية :

$$\begin{aligned} \Delta Y_{t+2} &= b\,\Delta Y_{t+1} \\ &= b\,(b\,\Delta I_t) = b^2\,\Delta I_t \end{aligned}$$

وهكذا حتى نصل إلى الفترة n ، ولكن يلاحظ أن الزيادة في كل فترة تقل عن الزيادة في الفترة السابقة، حيث إن :

$$b > b^2 > b^3 \dots, b^n$$

طالما أن الميل الحدِّي للاستهلاك (b) يقل عن واحد صحيح [Sinctair, 1983].

وعندما يؤدِّي المضاعف مفعوله الكامل نحصل على زيادة نهائية في الدخل قدرها :

$$\begin{aligned} \Delta Y &= \Delta Y_t + \Delta Y_{t+1} + \Delta Y_{t+2} + \dots + \Delta Y_{t+n} \\ &= \Delta I + b\,\Delta I + b^2\,\Delta I + \dots + b^n\,\Delta I \\ \Delta Y &= \Delta I\,(1 + b + b^2 + \dots + b^n) \end{aligned}$$

ويتضح أن المقدار: $1 + b + b^2 + ... + b^n$
عبـارة عن متوالية هندسية لا نهائية أساسها كسر يساوي b ، وحدّها الأول يساوي 1 فيكون مجموعها $\frac{1}{1-b}$.

ومن ثم فإن الزيادة النهائية في الدخل تساوي :

$$\Delta Y = \frac{\Delta I}{1-b}$$

ويكون المضاعف مساويًا :

$$k_I = \frac{\Delta Y}{\Delta I} = \frac{1}{1-b}$$

وهو ما سبق أن حصلنا عليه .

وتعبِّر المعادلة [$\Delta Y = \Delta I (1 + b + b^2 + ... + b^n)$] عن المضاعف الديناميكي ، ويمكن استخدام هذه المعادلة في حساب النسبة المتحققة من تأثير المضاعف خلال أي عدد من الفترات ؛ فالنسبة المحققة خلال **٣** فترات مثلاً تساوي :

$$\frac{k_{d3}}{dI} = \frac{1 + b + b^2}{k_I}$$

ويلاحظ أن الجـزء الأكبر من تأثير المضاعف يتركز في السنوات القليلة الأولى كلما كان حجم الميل الحـدِّي للاستهـلاك صغـيراً ، كما يلاحظ أننـا افـترضنـا أن الـزيادة في الاستثـمار كانت دائمـة . أمـا إذا كانت لفـترة واحـدة فقط فإن الـدخل سوف يزداد بمقـدار الـزيادة في الاستثـمار ، ثم ينقص ببطء ليعـود لمستـواه السـابق [Huang, 1965 and Metwally, 1974].

(٩ ـ ٤) المضاعفات في اقتصاد ذي ثلاثة قطاعات

نحاول الآن أن نأخذ النشاط الحكومي في الاعتبار، فتصبح متطابقة الدخل القومي مساوية:

$$Y = C + I + G \qquad \dots (1)$$

ويختلف هذا النظام عن النظام السابق في إدخال الإنفاق الحكومي (G) والضرائب، فيصبح الاستهلاك دالة للدخل المتاح (Y_d) حيث:

$$Y_d = Y - T + R \qquad \dots (2)$$

باعتبار أن T تمثّل الضرائب بينما R تمثّل الإعانات، ويمكن التمييز بين نوعين من الضرائب: (ا) ضرائب مستقلة عن الدخل، (ب) ضرائب دخل. أما النوع الأول فيمثّل ضريبة تفرض على الأفراد بغض النظر عن مستوى دخلهم، وأما النوع الثاني من الضرائب فيكون دالة للدخل، فإذا افترضنا أنها ضرائب نسبية يكون لدينا:

$$T = t\,Y \qquad \dots (3)$$

حيث t تمثّل معدّل (أو نسبة الضريبة)، أما R فتمثّل الإعانات الشخصية وهي بمثابة ضرائب سالبة، وهكذا فإنه يمكن صياغة دالة الضريبة كالآتي:

$$T = t\,Y - R$$

فإذا افترضنا كالسابق أن الاستهلاك دالة خطية في الدخل نحصل على:

$$C = a + b\,Y_d$$

وبافتراض أن الاستثمار والإنفاق الحكومي والإعانات متغيّرات تلقائية أو:

$$I = \bar{I} \qquad \dots (6)$$

$$G = \bar{G} \qquad \dots (7)$$

$$R = \bar{R} \qquad \dots (8)$$

فإنه بالتعويض من المعادلات (2) ، (5) ، (6) ، (7) ، (8) في المعادلة (1) نحصل على :

$$Y = a + b\,(Y - T + \bar{R}) + \bar{I} + \bar{G} \qquad \dots (9)$$

وسوف نستخدم المعادلة (9) في حساب المضاعفات في اقتصاد ذي ثلاثة قطاعات بافتراض أن الضرائب مستقلة عن الدخل أو الضرائب دالة للدخل .

(٩ ـ ٤ ـ ١) حالة الضرائب المستقلة عن الدخل

تعتبر الضرائب في هذه الحالة متغيّرًا تلقائيًا ، ونحصل من المعادلة رقم (9) على :

$$Y - bY = a - b\,\bar{T} + b\,\bar{R} + \bar{I} + \bar{G}$$

$$\dots (10)$$

$$Y = \frac{1}{1-b}(a - b\bar{T} + b\bar{R} + \bar{I} + \bar{G})$$

وبأخذ التفاضل الجزئي للمعادلة (10) بالنسبة لكل نوع من أنواع الإنفاق التلقائي نحصل على المضاعفات الآتية :

مضاعف الإنفاق الاستهلاكي التلقائي :

$$k_a = \frac{\partial Y}{\partial a} = \frac{1}{1-b} \qquad (11)$$

مضاعف الاستثمار:

$$k_{\bar{I}} = \frac{\partial Y}{\partial \bar{I}} = \frac{1}{1-b} \qquad (12)$$

مضاعف الإنفاق الحكومي

$$k_{\bar{G}} = \frac{\partial Y}{\partial \bar{G}} = \frac{1}{1-b} \qquad (13)$$

ويتضح من المعادلات الثلاث الأخيرة أنه في حالة اقتصاد ذي ٣ قطاعات وضرائب مستقلة عن الدخل لا تختلف قيمتا مضاعف الاستثمار والإنفاق الاستهلاكي التلقائي عن نظيرتهما في اقتصاد ذي قطاعين (أي اقتصاد يخلو من النشاط الحكومي)، كما يتضح من المعادلات أن مضاعفات الإنفاق الحكومي والاستثمار والإنفاق الاستهلاكي التلقائية متساوية.

وبأخذ التفاضل الجزئي للمعادلة (10) بالنسبة للمتغيّرات T ، R نحصل على:
مضاعف الضريبة:

$$k_{\bar{T}} = \frac{\partial Y}{\partial \bar{T}} = \frac{-b}{1-b} \tag{14}$$

مضاعف الإعانات:

$$k_{\bar{R}} = \frac{\partial Y}{\partial \bar{R}} = \frac{b}{1-b} \tag{15}$$

ويتضح من المعادلتين الأخيرتين:
(أ) إن مضاعف الضرائب يكون سالبًا، وذلك لأن الضريبة تمثِّل تسربًا من الدخل.
(ب) إن القيمة المطلقة لمضاعف الإعانات تساوي القيمة المطلقة لمضاعف الضريبة [Shone, 1984].

وبمقارنة المعادلة (15) بالمعادلة (13) يتضح أن مضاعف الإنفاق الحكومي يفوق مضاعف الإعانات طالما أن الميل الحدِّي للاستهلاك يقل عن واحد صحيح ؛ ومن ثم فإنه من الأفضل لإنعاش الاقتصاد القومي أن تنفق الحكومة مبلغًا ما بدلاً من منحه كإعانات شخصية للأفراد، والسبب أن ميل الحكومة للإنفاق يساوي واحدًا صحيحًا بينما ميل الأفراد للإنفاق يقل (عادةً) عن واحد صحيح. ومن ثم تكون:

$$k_G > k_R$$

(٩ ـ ٤ ـ ٢) حالة الضرائب النسبية

تكون الضرائب في هذه الحالة دالة للدخل، وبالتعويض من المعادلة رقم (3) في المعادلة رقم (9) نحصل على :

$$Y = a + b\,(Y - t\,Y + \bar{R}) + \bar{I} + \bar{G} \qquad \text{... (16)}$$

وتعطي هذه المعادلة :

$$Y - b\,Y + b\,t\,Y = a + b\,\bar{R} + \bar{I} + \bar{G}$$

$$Y\,(1 - b + b\,t) = a + b\,\bar{R} + \bar{I} + \bar{G}$$

$$Y = \frac{1}{1 - b + bt}\,(a + b\,\bar{R} + \bar{I} + \bar{G}) \qquad (17)$$

وبأخذ التفاضل الجزئي للمعادلة (17) بالنسبة للمتغيّرات المختلفة نحصل على المضاعفات الآتية :

مضاعف الاستهلاك التلقائي :

$$k_a = \frac{\partial Y}{\partial a} = \frac{1}{1 - b + bt} \qquad (18)$$

مضاعف الاستثمار:

$$k_{\bar{I}} = \frac{\partial Y}{\partial \bar{I}} = \frac{1}{1 - b + bt} \qquad (19)$$

مضاعف الإنفاق الحكومي :

$$k_{\bar{G}} = \frac{\partial Y}{\partial \bar{G}} = \frac{1}{1 - b + bt} \qquad (20)$$

وتوضِّح المعادلات الثلاث الأخيرة أن مضاعفات الاستهلاك التلقائي والاستثمار والإنفـاق الحكومي متساوية، ولكن قيمها أقل من تلك التي حصلنا عليها في حالة الضرائب المستقلة، ويرجع ذلك إلى أن ضرائب الدخل في النموذج الحالي تسبب تسربًا

من القوة الشرائية ؛ ومن ثم نقصًا في حجم المضاعف. ومن المعادلة (17) نحصل على :

مضاعف الإعانات :

$$k_{\bar{R}} = \frac{\partial Y}{\partial \bar{R}} = \frac{-b}{1-b+bt} \qquad \ldots (21)$$

ويتّضح أن مضاعف الإعانات يقل عن مضاعف الإنفاق الحكومي، وهي النتيجة نفسها التي توصلنا إليها سابقًا [Shapiro, 1982].

كما يمكن أن نحسب مضاعف معدّل الضريبة k_t من المعادلة رقم (17) كالآتي :

$$k_t = \frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{-b\,(a + b\,\bar{R} + \bar{I} + \bar{G})}{(1-b+bt)^2} \qquad \ldots (22)$$

وبالتعويض من المعادلة رقم (17) في المعادلة رقم (22) نحصل على :

$$k_t = \frac{-bY}{1-b+bt} \qquad \ldots (23)$$

ويتّضح أنه مضاعف سالب، ولكن تختلف قيمته كليةً عن قيمة مضاعف الضريبة المستقلة في النموذج السابق.

(٩ ـ ٥) مضاعف الميزانية المتوازنة

ماذا يحدث للدخل القومي إذا زاد الإنفاق الحكومي وزادت في الوقت نفسه الضرائب بالمقدار نفسه ؛ أي إذا حافظت الحكومة على توازن الميزانية؟ . سوف نستعين بمبادىء التفاضل الجزئي في الإجابة على هذا السؤال وسوف نميِّز فيما يلي بين حالتين.

(٩ ـ ٥ ـ ١) حالة الضرائب المستقلة عن الدخل

لا توجد في هذه الحالة علاقة بين الضرائب والدخل كأن تفرض ضريبة ثابتة مثلاً على كل فرد.

إذا رمزنا للدخل القومي بالرمز Y ، وللإنفاق الاستهلاكي بالرمز C ، وللاستثمار بالرمز I ، وللإنفاق الحكومي بالرمز G ، وللضرائب بالرمز T ، فإننا نحصل على:

$$Y = C + I + G \qquad \dots (1)$$

$$C = f(Y - T) \qquad \dots (2)$$

وبالتعويض من (2) في (1) نحصل على:

$$Y = f(Y - T) + I + G \qquad \dots (3)$$

$$Y = \phi\,(I, G, T) \qquad \dots (4)$$

ويعطي التفاضل الكلي للمعادلة الأخيرة:

$$dY = \frac{\partial Y}{\partial I}\,dI + \frac{\partial Y}{\partial G}\,dG + \frac{\partial Y}{\partial T}\,dT \qquad \dots (5)$$

فإذا افترضنا أنه لم يحدث أي تغيّر في الإنفاق الاستثماري، وأنه قد حدث تغيّر مماثل في الضرائب والإنفاق الحكومي نحصل على:

$$dI = 0 \qquad \dots (6)$$

$$dG = dT \qquad \dots (7)$$

وبالتعويض من المعادلتين (6) ، (7) في المعادلة رقم (5) نحصل على:

$$dY = \frac{\partial Y}{\partial G}\,dG + \frac{\partial Y}{\partial T}\,dG$$

$$dY = \left(\frac{\partial Y}{\partial G} + \frac{\partial Y}{\partial T}\right) dG \qquad \dots (8)$$

لكن من المعادلة (3) نحصل على :

$$\frac{\partial Y}{\partial G} = f'(Y-T)\frac{\partial Y}{\partial G} + 1$$

$$\therefore \quad \frac{\partial Y}{\partial G} = \frac{1}{1-f'(Y-T)} \qquad (9)$$

كما نحصل من المعادلة رقم (3) على :

$$\frac{\partial Y}{\partial T} = \frac{-f'(Y-T)}{1-f'(Y-T)} \qquad (10)$$

وبالتعويض من المعادلتين (9) ، (10) في المعادلة (8) نحصل على :

$$dY = \left[\frac{1}{1-f'(Y-T)} - \frac{f'(Y-T)}{1-f'(Y-T)}\right] dG \qquad (11)$$

ومن هذه المعادلة الأخيرة نحصل على :

$$dY = dG \qquad \ldots (12)$$

وتوضِّح المعادلة (12) أنه إذا زاد الإنفاق الحكومي وزادت في الوقت نفسه الضرائب بالمقدار نفسه فإن الدخل لن يبقى ثابتًا ؛ بل سوف يزداد بمقدار الزيادة في الإنفاق الحكومي . وتعرف هذه الظاهرة بنظرية الميزانية المتوازنة ، ويتضح أن مضاعف الميزانية المتوازنة يساوي واحدًا صحيحًا :

$$\frac{dY}{dG} = 1 \qquad \ldots (13)$$

ويرجع السبب في ذلك إلى اختلاف حجم الميل الحدِّي للاستهلاك عند الأفراد والحكومة ، فالميل الحدِّي للاستهلاك عند الأفراد يكون أقل من 1 ، بينما ميل الحكومة

للاستهلاك يساوي واحدًا صحيحًا [Archibald, 1977]. ويمكن توضيح النظرية بمثال بسيط.

لنفترض أن دالة الاستهلاك خطّية وتساوي:

$$C = a + bY_d \qquad \dots (14)$$

حيث b الميل الحدِّي للاستهلاك، وحيث Y_d الدخل المتاح أو:

$$Y_d = Y - T \qquad \dots (15)$$

وبالتعويض من المعادلتين (14) ، (15) في المعادلة رقم (1) نحصل على:

$$Y = \frac{1}{1-b}(a + I + G - bT) \qquad (16)$$

ومن المعادلة الأخيرة نحصل على:

$$\frac{\partial Y}{\partial G} = \frac{1}{1-b} \qquad (17)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial T} = \frac{-b}{1-b} \qquad (18)$$

وبجمع المعادلتين (17) ، (18) نحصل على:

$$\frac{\partial Y}{\partial G} + \frac{\partial Y}{\partial T} = \frac{1}{1-b} - \frac{b}{1-b}$$

$$= \frac{1-b}{1-b} = 1$$

(٩ ـ ٥ ـ ٢) حالة الضرائب النسبية

نفترض في هذه الحالة أن الضرائب دالة خطية للدخل أو:

$$T = tY - g \qquad \dots (1)$$

ولنستمر في استخدام المتطابقة:

$$Y = C + I + G \quad \dots (2)$$

والمعادلة:

$$C = a + b\,(Y - T) \quad \dots (3)$$

وبالتعويض نحصل على:

$$Y = \frac{a + I + G + bg}{1 - b\,(1 - t)} \quad (4)$$

وبافتراض أن:

$$dG = dT \quad \dots (5)$$

فمن المعادلة (4) نحصل على:

$$\frac{\partial Y}{\partial G} = \frac{1}{1 - b\,(1 - t)} \quad (6)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{-\,bY}{1 - b\,(1 - t)} \quad (7)$$

ومن المعادلة (1) نحصل على:

$$dT = tdY + Ydt \quad \dots (8)$$

ومن هذه المعادلة الأخيرة نحصل على:

$$dt = \frac{dT - tdY}{Y} \quad (9)$$

وبالتعويض من المعادلة (5) في المعادلة (9) نحصل على:

$$dt = \frac{dG - tdY}{Y} \qquad (10)$$

وحيث إن المتغيّرات في هذه الحالة هي G ، t فإننا نحصل على :

$$dY = \frac{\partial Y}{\partial G} dG + \frac{\partial Y}{\partial t} dt \qquad (11)$$

وبالتعويض من المعادلات (6) ، (7) ، (10) في المعادلة (11) نحصل على :

$$dY = \frac{dG}{1-b(1-t)} - \frac{bY}{1-b(1-t)} \cdot \frac{dG - tdY}{Y}$$

$$dY = \frac{dG - bdG + btdY}{1-b(1-t)} \qquad (12)$$

وبضرب الطرفين والوسطين نحصل على :

$$dG(1-b) + btdY = dY - bdY + btdY$$

وبالاختصار نحصل على :

$$dG(1-b) = dY(1-b)$$

ومن ثم فإن :

$$dG = dY$$

أو:

$$\frac{dY}{dG} = 1$$

أي أن مضاعف الميزانية المتوازنة يساوي واحدًا صحيحًا [Salant, 1957].

(٩ ـ ٦) المضاعفات في اقتصاد مفتوح

لو افترضنا اقتصادًا مفتوحًا لحصلنا على متطابقة الدخل الآتية :

$$Y = C + I + G + X - M \qquad \dots (1)$$

حيث:

Y = الدخل القومي

C = الاستهلاك

I = الاستثمار

G = الإنفاق الحكومي

X = الصادرات

M = الواردات

وبافتراض أن الاستهلاك دالة للدخل المتاح (أي الدخل القومي بإضافة الإعانات إليه وطرح الضرائب منه)، وأن العلاقة بينهما علاقة خطّية، فإنه يمكننا كتابة:

$$C = a + bY_d. \qquad \dots (2)$$

حيث:

a = الاستهلاك التلقائي

b = الميل الحدّي للاستهلاك

Y_d = الدخل المتاح

$$Y_d = Y - T + R$$

حيث T تمثّل ضرائب الدخل وحيث R تمثّل الإعانات.

باستخدام قواعد التفاضل الجزئي نحصل على المضاعفات الآتية:

مضاعف الاستهلاك التلقائي

$$k_a = \frac{\partial Y}{\partial a} = \frac{1}{1 - b + bt + m}$$

مضاعف الإعانات

$$k_R = \frac{\partial Y}{\partial R} = \frac{b}{1 - b + bt + m}$$

مضاعف الإنفاق الحكومي

$$k_G = \frac{\partial Y}{\partial G} = \frac{1}{1 - b + bt + m}$$

وحيث إن الميل الحدّي للاستهلاك يكون عادةً أقل من واحد صحيح (أي أن $b < 1$) فإن مضاعف الإنفاق الحكومي يكون أكبر من مضاعف الإعانات [Allen, 1967 and Anderson, 1979].

مضاعف الاستثمار

$$k_I = \frac{\partial Y}{\partial \bar{I}} = \frac{1}{1 - b + bt + m}$$

مضاعف الإنفاق الحكومي

$$k_G = \frac{\partial Y}{\partial G} = \frac{1}{1 - b + bt + m}$$

مضاعف الصادرات (أو التجارة الخارجية)

$$k_x = \frac{\partial Y}{\partial X} = \frac{1}{1 - b + bt + m}$$

مضاعف الاستيراد التلقائي

$$k_g = \frac{\partial Y}{\partial g} = \frac{-1}{1 - b + bt + m}$$

مضاعف الضريبة

$$k_T = \frac{\partial Y}{\partial T} = \frac{-b}{1 - b + bt + m}$$

مضاعف معدّل الضريبة

$$k_t = \frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{-bY}{(1 - b + bt + m)}$$

ويتضح من المعادلات أعلاه أن حجم المضاعف يتوقف على درجة التسرب التي تتمثل في الادخار (وتعبّر عن ذلك قيمة $1 - b$)، والضرائب (وتعبّر عن ذلك قيمة t)، والواردات (وتعبّر عن ذلك قيمة m)، فيقل حجم المضاعف كلما زاد التسرب .[Bowers, 1971 and Hildenbrand, 1982]

(٩ ـ ٧) تمرينـات

١) بافتراض العلاقات الآتية في اقتصاد ما:

$$C = 50 + 0.9Y_d$$

$$I = 20 + 0.15Y$$

$$M = 5 + 0.15Y_d$$

$$T = 10 + 0.2Y$$

فإذا كان مستوى الدخل يساوي ٢٠٠٠ مليون:

(أ) احسب قيمة الصادرات إذا كانت الميزانية متوازنة.

(ب) احسب التغيّر في الدخل الذي سوف ينتج عن زيادة الواردات التلقائية بمقدار مليونين.

(جـ) احسب التغيّر في الدخل الذي سوف ينتج عن تغيّر في الإنفاق الحكومي والضرائب التلقائية بمقدار ٦٠ مليونًا.

٢) تمثّل العلاقات الآتية اقتصادًا ما:

$$C = 5 + 0.8Y_d$$

$$M = 2.5 + 0.1Y$$

فإذا كانت الضرائب نسبية بمعدّل ٢٥٪، وكان الدخل يساوي ١٠٠ مليون

والميزان التجاري متوازنًا

(أ) احسب قيمة I + G

(ب) احسب التغـيّر في Y إذا حدثت زيادة في الـواردات التلقائية تساوي ٢,٥ مليون، واحسب التغيّر في الميزان التجاري.

(جـ) احسب معدّل الضريبة الجديد اللازم لتحقيق التوازن في الميزان التجاري.

٣) المطلوب استخدام المعلومات الآتية في تقدير مستوى الدخل التوازني وقيمة كل من مضاعف الاستثمار ومضاعف الإعانات ومضاعف معدّل الضريبة

$$C = 100 + 0.8Y_d$$

$$I = 100$$

$$G = 62$$

$$T = 0.10Y$$

$$X = 50$$

$$R = 10$$

$$M = 20 + 0.02Y$$

٤) بافتراض العلاقات الآتية:

$$C = c_0 + cY_d$$

$$G = G_0 - gY$$

$$I = I_0 + aY$$

$$T = t_0 + t_Y$$

$$R = r_0 - rY$$

$$M = m_0 + mY$$

$$X = x_0$$

(أ) احسب مستوى الدخل التوازني.

(ب) احسب مضـاعف كل من الاستثـمار والإنفاق الحكومي والإعانات ومعدّل

الضريبة ومضاعف التجارة الخارجية .

٥) إذا كان دخل التوظف الكامل مساويًا ٨٠٠ مليون وكان الإنفاق الاستهلاكي مساويًا :

$$C = 10 + 0.9Y_d$$

وبافتراض أن

$$G = 15$$

$$T = 12$$

$$I = 60$$

(ا) احسب الدخل التوازني، ووضِّح ما إذا كان هناك فجوة تضخمية أو انكماشية .

(ب) إذا رغبت الحكومة في تحقيق التوظف الكامل عن طريق تغيّر إنفاقها، بكم يتعينّ أن يتغيّر هذا الإنفاق؟ وماذا يحدث لميزانيتها نتيجة هذا التغيّر؟

(جـ) إذا رغبت الحكـومة في تحقيق التوظف الكامل عن طريق تغيّر الضرائب، احسب مقدار هذا التغيّر واذكر أثر هذا التغيّر على ميزانية الدولة .

الفصل العاشر

الاستهلاك

يُكوِّن الإنفاق الاستهلاكي الخاص في معظم الدول أكبر نسبة من إجمالي الدخل القومي ؛ ومن ثم فإن محدِّدات هذا الإنفاق لها تأثير كبير على مستوى الدخل، وسوف يتناول هذا الفصل دراسة دالة الاستهلاك وافتراضات الاستهلاك المختلفة.

(١٠ - ١) دالة الاستهلاك

يعتبر الدخل المتاح، طبقًا للاقتصادي كينز [Keynes, 1936] ، أهم محدِّد للإنفاق الاستهلاكي الخاص، وقد عُبِّر عن العلاقة بين هذين المتغيرين بدالة الاستهلاك التي يمكن صياغتها رياضيًا كالآتي:

$$C = C\,(Y_d)$$

حيث:

C = الإنفاق الاستهلاكي الخاص

Y_d = الدخل المتاح

ويتحدد الدخل المتاح بالدخل القومي مع طرح الضرائب المباشرة منه، وإضافة الإعانات إليه (أو التحويلات) الشخصية، وبمعنى آخر:

$$Y_d = Y - T + R$$

حيث:

Y = الدخل القومي

T = الضرائب المباشرة

R = الإعانات الشخصية

فإذا افترضنا عدم وجود ضرائب أو إعانات فإنه يمكن التعبير عن دالة الاستهلاك كالآتي :

$$C = f(Y)$$

ونحصل من هذه الدالة الأخيرة على التعاريف الآتية :

$$APC = \frac{C}{Y} = \frac{f(Y)}{Y} \tag{1}$$

$$MPC = \frac{dC}{dY} = f'(Y) \tag{2}$$

$$\eta_{CY} = \frac{dC}{dY} \; \frac{Y}{C} = \frac{Y_0 f'(Y)}{f(Y)} \tag{3}$$

وتمثِّل المعادلة (1) الميل المتوسط للاستهلاك أو نسبة الإنفاق الاستهلاكي الكلي الخاص إلى الدخل، أما المعادلة (2) فتمثِّل الميل الحدِّي للاستهلاك أو معدل التغير في الاستهلاك بالنسبة للدخل، أما المعادلة (3) فتعطي مرونة الإنفاق الاستهلاكي بالنسبة للدخل .

وإذا رمزنا للادخار بالرمز S فإننا نحصل على :

$$Y = C + S$$

ومن هذه المعادلة الأخيرة نحصل على :

$$S = Y - C$$

ومن ثم يمكن تعريف :

$$APS = \frac{S}{Y} = \frac{Y - C}{Y} = 1 - APC \qquad \ldots(4)$$

$$MPS = \frac{dS}{dY} = \frac{d}{dY}(Y - C) = 1 - MPC \qquad \ldots(5)$$

$$\eta_{SY} = \frac{dS}{dY} \cdot \frac{Y}{S} = \frac{1}{S}(Y - C\eta_{CY}) \qquad \ldots (6)$$

وتعطي المعادلة (4) الميل المتوسط للادخار (APS = The Average Propensity to Save)، ويتضح أنه (في حالة غياب الضرائب وفي اقتصاد مغلق) يساوي واحدًا ناقصًا الميل المتوسط للاستهلاك.

وتعطي المعادلة (5) الميل الحدِّي للادخار، ويتضح أنه (مع الافتراضات نفسها) يساوي واحدًا ناقصًا الميل الحدِّي للاستهلاك.

أما المعادلة (6) فتوضِّح أن مرونة الادخار بالنسبة للدخل تساوي (مع الافتراضات نفسها) مقلوب الادخار مضروبًا في الفرق بين الدخل القومي وحاصل ضرب مرونة الاستهلاك في مقدار الإنفاق الاستهلاكي.

(١٠ ـ ٢) افتراضات الاستهلاك

رأينا أن الدخل يعتبر المحدد الرئيس للإنفاق الاستهلاكي الخاص؛ إلا أن هناك اختلافًا بين الاقتصاديين حول طبيعة العلاقة بين الدخل والاستهلاك، ولقد ظهرت افتراضات عديدة تحاول تفسير هذه العلاقة وسوف نتناول باختصار أهم هذه الافتراضات.

(١٠ ـ ٢ ـ ١) افتراض الدخل المطلق

طبقًا لهذا الافتراض يتوقف الإنفاق الاستهلاكي في الفترة t على الدخل المتاح في الفترة نفسها ويتزايد الاستهلاك كلما زاد الدخل ولكن بنسبة أقل. ويعتبر الاقتصادي كينز من أهم أنصار هذا الافتراض. فهذا الافتراض يسلِّم بأن الميل المتوسط والميل الحدِّي للاستهلاك يتناقصان كلما زاد الدخل ولكن الميل المتوسط للاستهلاك يكون أكبر

من الميل الحدِّي للاستهلاك عند كل دخل ؛ كما أن مرونة الاستهلاك بالنسبة للدخل تتراوح بين الصفر والواحد الصحيح .

ويمكن صياغة أهم مسلّمات هذا الافتراض رياضيًّا في الآتي :

$$C_t = f(Y_t) \tag{1}$$

$$0 < \frac{dC}{dY} < 1 \tag{2}$$

$$\frac{d}{dY}\left(\frac{C}{Y}\right) < 0 \tag{3}$$

$$\frac{d}{dY}\left(\frac{dC}{dY}\right) < 0 \tag{4}$$

$$\frac{C}{Y} > \frac{dC}{dY} \tag{5}$$

$$0 < \frac{d \ln C}{d \ln Y} < 1 \tag{6}$$

ويتطلب تحقيق خصائص هذا الافتراض أن تكون دالة الاستهلاك غير خطية وغير نسبية . ومن أمثلة هذه الدالة :

$$C = aY^b$$

حيث :

C تمثِّل الإنفاق الاستهلاكي

Y تمثِّل الدخل

$$0 < a < \frac{Y^{1-b}}{b} \quad ; 0 < b < 1$$

ويمكن استنتاج العلاقات الآتية باستخدام هذه الدالة وهذه القيود :

$$APC = \frac{C}{Y} = a\,Y^{b-1} > 0$$

$$MPC = \frac{dC}{dY} = a\,b\,Y^{b-1} > 0$$

$$\frac{d}{dY}\,(APC) = a\,(b-1)\,Y^{b-2} < 0$$

$$\frac{d}{dY}\,(MPC) = a\,(b-1)\,Y^{b-2} < 0$$

$$\eta_{CY} = \frac{d \ln C}{d \ln Y} = b < 1$$

ويتّضح أن كلاًّ من الميل المتوسط للاستهلاك والميل الحدِّي للاستهلاك موجب ولكن يتناقصان كلما زاد الدخل. كما أن الميل المتوسط للاستهلاك يكون أكبر من الميل الحدِّي للاستهلاك عند كل دخل، وبالإضافة إلى ذلك فإن مرونة الاستهلاك تكون أقل من واحد صحيح، أي أن الدالة تحقِّق جميع خصائص افتراض الدخل المطلق المذكورة أعلاه [Zellner, 1957].

ولقد أوضحت الدراسات القياسية أن دالة الاستهلاك تميل إلى أن تكون نسبية في الأجل الطويل وغير نسبية في الأجل القصير، ولقد حاول عدد كبير من الاقتصاديين التوفيق بين هاتين الظاهرتين، مما أدى إلى ظهور افتراضات أخرى غير افتراض الدخل المطلق. وسوف نتناول فيما يلي أربعة من هذه الافتراضات باستخدام المنهج الرياضي لتوضيح أهم خصائص كل افتراض.

(١٠ ـ ٢ ـ ٢) افتراض الدخل النسبي

طبقًا لافتراض الدخل النسبي يحدد الأفراد إنفاقهم الاستهلاكي آخذين في الاعتبار المحيط الاجتماعي الذي يعيشون فيه، فاستهلاك العائلة يزداد إذا جاورت

عائـلات غنية عائـلات فقيرة؛ إذ أن النمط الاستهلاكي للعائلة المعيّنة سوف يتأثر بالنمط الاستهلاكي لجيرانها حرصًا منها على الإبقاء على وضع أو مركز اجتماعي يناسب المحيط الـذي تعيش فيه، وهكـذا فإنـه طبقًـا لهذا الافـتراض لا يتحـدد الإنفـاق الاستهلاكي بالدخل المطلق وإنما بالدخل النسبي السائد في المحيط الذي تعيش فيه الأسرة.

وطبقًـا للاقتصادي ديزنبري [Duesenberry, 1949] (صاحب هذا الافتراض) يحاول الأفراد البقاء على مستوى معيشة معين، ويتأثر هذا المستوى بدخل القمة الذي حققه الفرد خلال الفترات القليلة الماضية، ومن أهم مسلّمات هذا الافتراض أنه إذا كان الدخل في تزايد مستمر وأعلى من دخل القيمة السابق فإن الميل المتوسط للاستهلاك يكون ثابتًا ومساويًا للميل الحدِّي للاستهلاك. أما إذا انخفض الدخل الحالي عن دخل القمة الماضي فإن الاستهلاك الحالي سوف يتأثر بمستوى المعيشة الذي سبق أن حدده دخل القمة؛ ومن ثم فإن الميل المتوسط للاستهلاك سوف يزداد، ويفوق الميل الحدِّي للاستهلاك، وإذا ما عاد الدخل الحالي إلى التزايد فإن الميل المتوسط للاستهلاك سوف يتناقص، وكما يتناقص أيضا الميل الحدِّي للاستهلاك، ولكن الميل الحدِّي للاستهلاك يكون أقل من الميل المتوسط للاستهلاك، وبعبارة أخرى فإنه طبقًا لافتراض الدخل النسبي تكـون دالة الاستهلاك غير نسبية في الأجل القصير ونسبية (أي تعطي ميلاً متوسطًا للاستهلاك ثابتًا ومساويًا للميل الحدِّي للاستهلاك) في الأجل الطويل.

ويمكن تلخيص أهم مسلّمات هذا الافتراض رياضيًّا في الآتي:

$$C = (c - b)\bar{Y} + bY$$

حيث:

Y = الدخل الحالي

$\bar{Y}$ = دخل القمة

C = الاستهلاك

ففي الفترة الطويلة حينما يكون الدخل الحالي مساويًا دخل القمة أي:

$$Y = \bar{Y}$$

نحصل على:

$$C = c\bar{Y}$$

وهي دالة نسبية.

وفي الفترة القصيرة حينما يقل الدخل الحالي عن دخل القمة نحصل على:

$$C = a + bY$$

حيث تمثّل a مقدارًا ثابتًا يساوي:

$$a = (c - b)\,\bar{Y}$$

ويتّضح أنه في الفترة القصيرة نحصل على دالة استهلاك غير نسبية.

هذا وقد عبَّر الاقتصادي ديزنبري عن علاقة الاستهلاك بالدخل بالمعادلة:

$$\frac{S}{Y} = a\frac{Y}{\bar{Y}} + b$$

والتي تعطي:

$$\frac{C}{Y} = 1 - \left(a\frac{Y}{\bar{Y}} + b\right)$$

$$\frac{C}{Y} = h - a\frac{Y}{\bar{Y}}$$

حيث:

S = الادخار

$a > 0;\ \mathbf{h} = 1 - b;\ b \leqslant 0$

كما يمكن صياغة علاقة الادخار بالدخل طبقًا لهذا الافتراض بالمعادلة :

$$\frac{S}{Y} = b_1 \frac{Y - \bar{Y}}{Y} + b_2$$

(١٠ ـ ٢ ـ ٣) افتراض الدخل الدائم

يرى الاقتصادي فريدمان [Friedman, 1957] أن سلوك الأفراد الخاص بإنفاقهم الاستهلاكي لا يتحدد بمستوى الدخل الحالي، وإنما بالدخل الدائم أو بفرض الاستهلاك طويلة الأجل، وطبقًا لهذا الافتراض (في صورته المبسطة) يكون الإنفاق الاستهلاكي نسبة من الدخل الدائم أو:

$$C = bY^p$$

حيث Y^p تمثّل الدخل الدائم .

وهكذا فإن الميل المتوسط للاستهلاك يكون ثابتًا ومساويًا للميل الحدِّي للاستهلاك في الأجل الطويل أي أن :

$$\frac{C}{Y} = \frac{dC}{dY} = b$$

ولقياس الدخل الدائم يتعين التفرقة بين التغيّرات في الدخل التي تعتبر عابرة، وتلك التي لها صفة الدوام ؛ فالمتغيّرات الدائمة في الدخل هي تلك التي يتوقع الأفراد استمرارها لعدد من الفترات المقبلة على حين تكون التغيّرات العابرة (مثل العلاوة التشجيعية) هي تلك التغيّرات الطارئة غير المتوقعة ؛ ومن ثم يمكن التعبير عن قيمة الدخل بالمعادلة :

$$Y_t = Y^p + Y^T$$

حيث Y^T تمثّل الدخل العابر.

ويمكن أيضًا تقسيم الاستهلاك إلى استهلاك دائم واستهلاك عابر أو:

$$C_t = C^p + C^T$$

وطبقًا لافتراض الدخل الدائم لن يتأثر الاستهلاك الدائم بالتغيّرات العابرة في الدخل؛ ومن ثم يكون دالة نسبية للدخل الدائم.

ويمكن تعريف الدخل الدائم بأنه الوسط المرجح للدخل الحالي ودخول السنوات الماضية، وذلك بافتراض تناقص الوزن كلما بعدت الفترة، أو:

$$Y^p = w_0Y + w_1Y_{-1} + w_2Y_{-2} + \ldots + w_nY_{-n}$$

ويمثّل w_i الوزن المعطى لدخل الفترة i بحيث:

$$0 < w_i < 1$$
$$w_0 > w_1 > w_2 > \ldots > w_n$$
$$w_0 + w_1 + w_2 + \ldots + w_n = 1$$

ويمكن التعبير عن الاستهلاك بالمعادلة:

$$C^p = cY^p = cw_0Y + cw_1Y_{-1} + \ldots + cw_nY_{-n}$$

ويمثّل cw_0 الميل الحدّي للاستهلاك في الأجل القصير أما c فتمثّل الميل الحدّي للاستهلاك في الأجل الطويل ويلاحظ أن:

$$C > cw_0$$
$$C = cw_0 + cw_1 + \ldots + cw_n$$
$$C = c\,(w_0 + w_1 + \ldots + w_n)$$
$$C = c\,(1) = c$$

فإذا افترضنا أن الدخل الدائم يتوقف على دخل الفترتين السابقتين حسب المعادلة:

$$Y^p = \theta Y_1 + (1 - \theta)\,Y_2$$

فإن الاستهلاك يصبح مساويًا:

$$C^p = cY^p = c\theta Y_1 + c\,(1 - \theta)\,Y_2$$

ويكون الميل الحدِّي للاستهلاك في الأجل القصير مساويًا:

$$MPC = \frac{\partial C}{\partial Y_1} = c\,\theta$$

ويكون الميل الحدِّي للاستهلاك في الأجل الطويل ثابتًا ومساويًا للميل المتوسط للاستهلاك:

$$APC = MPC = c$$

وهكذا فإن الوزن المعطى للدخل الحالي (θ) يساوي

$$\theta = \frac{c\theta}{c}$$

أي أن:

$$\theta = \frac{\text{الميل الحدِّي للاستهلاك في الأجل القصير}}{\text{الميل الحدِّي الاستهلاك في الأجل الطويل}}$$

(١٠ ـ ٢ ـ ٤) افتراض دورة الحياة

طبقًا لهذا الافتراض لا يتوقف الإنفاق الاستهلاكي على دخل الأسرة فقط؛ وإنما أيضًا على ما لديها من ثروة، وعلى الدخول المستقبلة المتوقعة؛ وبناءً على ذلك فإن قرارات الاستهلاك تتعلق بطول فترة حياة الفرد، وليس بفترة زمنية معيَّنة؛ ومن ثم فإنه إذا قام بالاستهلاك طول الفترات:

$$1, \ldots, T$$

فإن دالة منفعته خلال فترة حياته نتوقف على استهلاكه في كل فترة من هذه الفترات أو:

$$U = U(c_1, c_2, \ldots, c_T)$$

وقد عبَّر الاقتصاديان أندو، ومودیجلياني [Ando, 1963 and Modigliani, 1960] (صاحبا هذا الافتراض) عن دالة الاستهلاك كالآتي:

$$C_t = aA_{t-1} + bY_t + cY_t^e$$

حيث A تمثِّل ما يمتلكه الفرد من ثروة أو أصول، وحيث تمثِّل Y^e القيمة الحالية للدخل المتوقع خلال فترة حياة المستهلك.

هذا وقد اقترح أصحاب الافتراض استخدام الدخل الحالي للتعبير عن Y^e ، وهكذا تصبح علاقة الاستهلاك:

$$C_t = a_1A_{t-1} + a_2Y_t$$

فلو افترضنا العلاقة الآتية:

$$C_t = 0.06A_{t-1} + 0.56Y_t + 0.24Y_{t-1}$$

فإن الميل الحدِّي للاستهلاك من الثروة يساوي:

$$\frac{\partial C^t}{\partial A_{t-1}} = 0.06$$

ويكون الميل الحدِّي للاستهلاك من الدخل في الأجل القصير مساويًا:

$$\frac{\partial C^t}{\partial Y_t} = 0.56$$

بينما يكون الميل الحدِّي للاستهلاك من الدخل في الأجل الطويل مساويًا:

$$C = 0.56 + 0.24 = 0.70$$

ويكون الوزن المعطى للدخل الحالي مساويًا:

$$\theta = \frac{0.56}{0.70} = 0.8$$

(١٠ ـ ٢ ـ ٥) افتراض الإسراع الاستهلاكي

عنـد قيام مؤلف هذا الكتـاب بإجـراء اختبارات قياسية لفروض الاستهلاك الأربعة المذكورة أعلاه اتضح أن سلوك الإنفاق الاستهلاكي في عدد كبير من الدول يخالف تمامًـا خصـائص الافـتراضات الأربعة المذكورة أعلاه، فلقد أوضحت نتائج الانحدار بالنسبة لهذه الدول:

(ا) إن الميل للاستهلاك يتصف بعدم الاستقرار.

(ب) إنه كلما زاد الدخل *زاد* الميل المتوسط للاستهلاك حتى إذا ما وصل الدخل إلى مستوى مرتفع معيّن بدأ هذا الميل في الانخفاض (أو أحيانًا في الاستقرار).

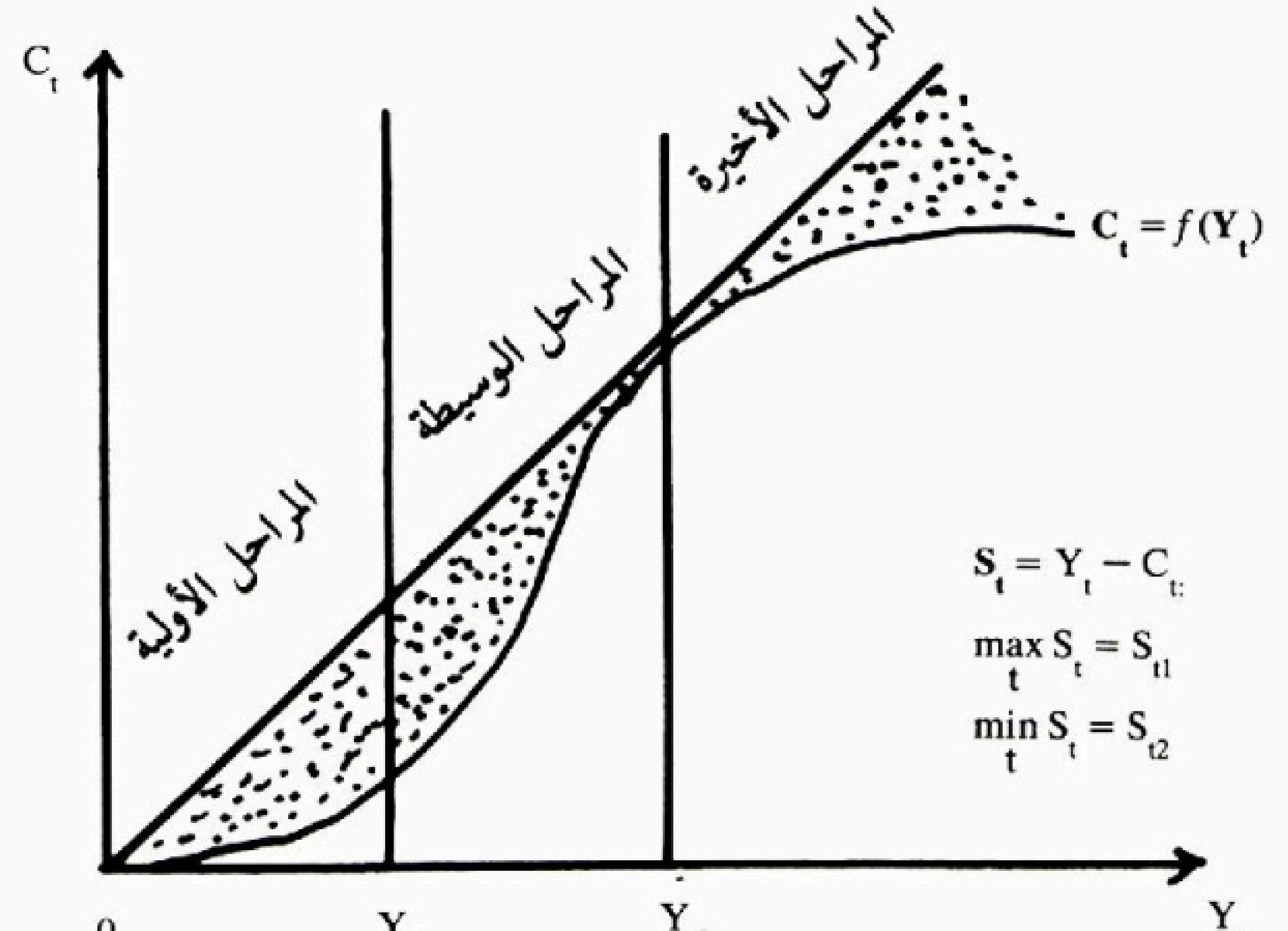
(جـ) إن الميل الحدِّي للاستهلاك يكون *أكبر* من الميل المتوسط للاستهلاك عندما يكون الدخل أقل من مستوى معيّن، ويكون الميل الحدِّي للاستهلاك أقل من الميل المتوسط للاستهلاك بعد هذا المستوى من الدخل.

(د) تفوق مرونة الاستهلاك بالنسبة للدخل الواحد الصحيح ولكنها تقل عن ذلك بعد أن يصل الدخل إلى مستوى معيّن.

ويتضح أن هذه الظواهر لاتتفق مع أي من الافتراضات المذكورة أعلاه، ولهذا السبب فكّـر مؤلف هذا الكتـاب في إدخـال صيغة جديدة لافتراض الدخل المطلق تتمشى خصائصها مع نتائج الاختبارات القياسية، ولقد أطلق على هذه الصيغة اسم افتراض «الإسراع الاستهلاكي». ويقوم هذا الافتراض على فكرة بسيطة وهي أنه في الدول الفقيرة جدًا يكون الدخل متواضعًا وكافيًا فقط لسد الحاجات الضرورية؛ ومن ثم لا يتم إشباع الكثير من الحاجات التي قد لا تعتبر كمالية في اقتصاد آخر تتمتع بدخل أكبر، كما أن الدول المعاصرة لا يعيش بعضها عن البعض الآخر في منأى، بسبب تحسن سبـل المـواصـلات والاتصـالات، فظهـور سلعـة جديدة في دولـة ما يصبـح معـروفًا لدى بقية الدول في وقت قصير. إلا أن ضعف القوة الشرائية لايمكن من الاستمتاع بهذه السلع في الدول الفقيرة، فإذا مازاد الدخل (وخاصة إذا حدثت الزيادة بصفة مفاجئة وكبيرة، كما حدث بالنسبة للدول المصدرة للنفط) فإنه سوف يكون هناك إسراع في الإنفاق الاستهلاكي لتحقيق التطلعات التي فرضها ضعف القوة الشرائية، وهكذا

سوف يزداد الاستهلاك بمعدّل أعلى من معدّل زيادة الدخل وتكون مرونة الاستهلاك الـدخلية أكـبر من الـواحد الصحيح. ويستمر هذا السلوك حتى يصل الدخل إلى مستوى عالٍ يُمَكِّنُ من شراء السلع التي تصبح الآن في «حكم الضرورية» فيعود الميل للاستهلاك إلى الاستقرار، وتصبح مرونة الاستهلاك بالنسبة للدخل أقل من الواحد الصحيح.

وتستمـد فرضية الإسراع الاستهـلاكي أسـاسهـا النـظري من فكرة «الفجوة الديمغرافية الانتقالية» والتي تصوِّر ظاهرة النمو السكّاني عبر الزمن بمنحنى لوجستي، فيمكن ربط فرضية الإسراع الاستهلاكي بعملية النمو الاقتصادي بتقسيم محور الزمن إلى ثلاث مراحل كما يتضح من الشكل البياني الآتي.



النمو الاقتصادي وافتراض الإسراع الاستهلاكي

يلاحظ أن نمو الدخل خلال المراحل الأولية $(0, Y_{t1})$ تؤدِّي إلى تزايد الادخار وذلـك بسبب سيادة عادات «التقشف» الاستهلاكي القديمة حيث لا تجد إضافات الـدخـل مخرجًـا استهـلاكيًا منـاسبًـا. أما خلال المراحل الوسيطة للنمو الاقتصادية

(Y_{t1}, Y_{t2}) فإن العادات الاستهلاكية تبلغ حدًّا من التطور يجعل فرضية الإسراع الاستهلاكي سائدة بين أفراد المجتمع، حيث تتجدد مخارج الإنفاق الاستهلاكي، ويسعى الأفراد لإشباع تطلعات استهلاكية متطورة، ولعل أهمها حيازة السلع الاستهلاكية المعمّرة التي تتصف بها المجتمعات الحديثة المتطورة، فيتناقص الادخار خلال هذه المراحل عند كل مستويات الدخل، ومع بداية الفترات الأخيرة تكون العادات الاستهلاكية الحديثة قد تبلورت والتطلعات الاستهلاكية المهمة تحققت بدرجة كافية مما يؤدي إلى رجوع النمط الادخاري في التزايد.

ومما سبق يتضح أن فرضية الإسراع الاستهلاكي تعتمد بدرجة حاسمة على عنصر الزمن أو بعبارة أدق على عملية النمو الاقتصادي للمجتمعات، وهكذا فإن المحور الأفقي يمثِّل مستويات مختلفة من الدخل القومي عند فترات زمنية مختلفة ولا يمثِّل مستويات مختلفة من الدخل عند نقطة زمنية محددة؛ ومن ثم فإن دخل الضروريات (Y_n) يقع في المرحلة $Y_{t1} - Y_{t2}$ ؛ أي المراحل الوسيطة التي تتميز بالإسراع الاستهلاكي.

ويمكن التعبير عن أهم سمات افتراض متولى للإسراع الاستهلاكي جبريًّا في الآتي:

1- $$\frac{dC}{dY} > 0$$

2- $$\frac{d}{dY}\left(\frac{C}{Y}\right) > 0 \quad \text{for} \quad Y < Y_n$$

3- $$\frac{d}{dY}\left(\frac{C}{Y}\right) < 0 \quad \text{for} \quad Y > Y_n$$

4- $$\frac{MPC}{APC} > 1 \quad \text{for} \quad Y < Y_n$$

5- $$\frac{MPC}{APC} < 1 \quad \text{for} \quad Y > Y_n$$

حيث Y_n يمثِّل مستوى دخل الضروريات ، فيزداد الميل الحدِّي للادخار بنسبة أقل من نسبة الزيادة في الدخل حتى مستوى الدخل Y_n ، ويزداد الميل للادخار بنسبة أكبر من نسبة الزيادة في الدخل عندما يفوق مستوى الدخل القيمة Y_n.

وتعتبر دالة الاستهلاك الآتية إحدى الدوال التي تحقِّق متطلبات افتراض الإسراع الاستهلاكي :

$$C = Y^a e^{-b/Y}$$

حيث :

$$b > 0; 0 < a < 1$$

ويتضح من هذه الدالة أن :

$$APC = \frac{C}{Y} = Y^{a-1} e^{-b/Y} > 0$$

$$MPC = \frac{dC}{dY} = (a + b/Y)Y^{a-1} e^{-b/Y} > 0$$

$$\frac{d}{dY}\left(\frac{C}{Y}\right) = (a - 1 + b/Y)\, Y^{a-2} \quad e^{-b/Y}$$

$$\frac{d}{dY}(APC) > 0 \qquad \text{for} \quad Y < Y_n$$

$$\frac{d}{dY}(APC) < 0 \qquad \text{for} \quad Y > Y_n$$

حيث :

$$Y_n = \frac{-b}{a}\left(1 + \frac{\sqrt{1-a}}{a-1}\right)$$

كما يتضح أن:

$$\frac{MPC}{APC} = a + b/Y$$

$$\therefore MPC < APC \qquad \text{for } Y > Y_n$$

$$MPC > APC \qquad \text{for } Y < Y_n$$

$$\eta = \frac{dC}{dY}\frac{Y}{C} = a + b/Y$$

$$\eta > 1 \qquad \text{for} \qquad Y < \frac{b}{1-a}$$

$$\eta < 1 \qquad \text{for} \qquad Y > \frac{b}{1-a}$$

$$\eta = 1 \qquad \text{for} \qquad Y = \frac{b}{1-a}$$

وأخيراً يتضح أنه عندما:

$$Y = Y_n = \frac{-b}{a}\left(1 + \frac{\sqrt{1-a}}{a-1}\right)$$

تكون هناك نقطة انقلاب حيث:

$$\frac{d^2C}{dy^2} = 0$$

$$\frac{d^3C}{dY^3} \neq 0$$

ويتضح من معادلة المرونة أن:

$$\eta = a + \frac{b}{Y}$$

إن مرونة الاستهلاك تكون أكبر من واحد صحيح (على عكس افتراض الدخل المطلق) عندما يكون الدخل أقل من المستوى $\frac{b}{1-a}$ ، وتصبح المرونة أقل من واحد صحيح حينما يفوق الدخل الحالي هذا المستوى. إلا أن هذا المستوى من الدخل لايمثّل دخل الضروريات، والذي يتحدد كما رأينا بالمعادلة :

$$Y_n = \frac{-b}{a}\left(1 + \frac{\sqrt{1-a}}{a-1}\right) ; 0 < a < 1$$

(١٠ ـ ٣) العوامل الأخرى التي تؤثّر في الإنفاق الاستهلاكي

سبق أن رأينا أن كينز وغيره من الاقتصاديين اعتبروا أن الدخل المتاح أهم محدد للإنفاق الاستهلاكي [Eatwell, 1983]. إلا أن هناك عوامل أخرى موضوعية وذاتية قد تؤثّر في هذا النوع من الإنفاق، ومن أمثلة العوامل الموضوعية التي ذكرها كينز: تغيّرات مستوى الأجور والأسعار، وتغيّرات طرق حساب امتلاك المعدّات والآلات، والأرباح والخسائر غير المتوقعة، وتغيّرات السياسة المالية، وتوقعات الأفراد، وتغيّرات سعر الفائدة، ومن شأن هذه العوامل أن تؤدّي إلى انتقال في منحنى الاستهلاك إلى أعلى أو إلى أسفل. أما العوامل الذاتية فتشمل البخل أو التقتير، والبذخ، وحب الظهور. . . إلخ ، وقد ينعكس أثر هذه العوامل في تحديد درجة انحناء دالة الاستهلاك ؛ إلا أن كينز يرى أن العوامل الموضوعية والذاتية ليست ذات أهمية كبيرة في تحديد حجم الإنفاق الاستهلاكي في الأجل القصير. وسوف نحاول أن نختبر صحة هذا الافتراض في دور نتائج التحليل القياسي التي توصّل إليها مؤلّف هذا الكتاب وغيره من الاقتصاديين.

(١٠ ـ ٣ ـ ١) أثر التضخم على الإنفاق الاستهلاكي

إذا كانت دالة الاستهلاك نسبية (أي إذا كان الأفراد يحددون إنفاقهم الاستهلاكي بحيث يكون نسبة ثابتة من الدخل) فإن تغيّرات الأسعار لن تؤثّر في قيمة الميل الحدّي للاستهلاك ؛ فلو افترضنا أن الأفراد يحددون إنفاقهم الاستهلاكي بحيث

يكون استهلاكهم *الحقيقي* نسبة ثابتة من دخلهم *الحقيقي* فإننا نحصل على:

$$\frac{C}{P} = b\left(\frac{Y}{P}\right)$$

حيث:

C تمثِّل الاستهلاك

P تمثِّل المستوى العام للأسعار

Y تمثِّل الدخل

فلو ضربنا الطرفين في P نحصل على:

$$C = bY$$

وهكـذا فإن خداع النقود لن يؤثِّر في قيمة الميل الحدِّي للاستهلاك، إذا كانت دالة الاستهلاك نسبية.

أما إذا كانت دالة الاستهلاك الحقيقية غير نسبية فإنه سوف يكون هناك اختلاف في حجم الميل الحدِّي للاستهلاك، إذا قيست الدالة بالأسعار الجارية بدلاً من الأسعار الثابتة. فلو افترضنا أن دالة الاستهلاك الحقيقية تأخذ الشكل

$$\frac{C}{P} = a + b\left(\frac{Y}{P}\right)$$

وبضرب الطرفين في P نحصل على:

$$C = aP + bY$$

فلو قدرنا الاستهلاك كدالة خطية بسيطة للدخل الجاري فقط فإننا سوف نبالغ في قيمة الميل الحدِّي للاستهلاك؛ حيث إنه في فترات ارتفاع الأسعار والدخول الجارية سوف يكون لكل من المتغيِّرين أثر موجب على الإنفاق الاستهلاكي، وعلى العكس من ذلك لو كانت الدالة الحقيقية دالة خطِّية غير متجانسة تربط بين الاستهلاك والدخل؛

بالأسعار الجارية فإن قياس العلاقة بالأسعار الثابتة سوف يعطي قيمة للميل الحدِّي للاستهلاك أقل من قيمته الحقيقية.

هذا وقد وجد المؤلف أن لارتفاع الأسعار أثر واضح على نماذج الاستهلاك، فالارتفاع النسبي في أسعار المواد الغذائية والمشروبات والدخان والملابس يؤدِّي إلى زيادة النسبة المنفقة من الدخل على هذه السلع، وبصفة عامة:

«تزداد النسبة المنفقة من الدخل على السلع الضرورية إذا ما نشأ عن التضخم ارتفاع في أسعار هذه السلع بالنسبة لأسعار السلع الأخرى».

وتعرف هذه بقاعدة متولي ـ تمشكي [Metwally and Tamaschke, 1984].

(١٠ ـ ٣ ـ ٢) أثر سعر الفائدة على الإنفاق الاستهلاكي

يعتقد البعض أن ارتفاع سعر الفائدة يؤدِّي إلى تشجيع الادخار، ومن ثم نقص الاستهلاك؛ إلا أن هذا ليس بالضروري صحيحًا، فقد يؤدِّي رفع سعر الفائدة إلى تقليل الكمية الواجب ادخارها للحصول على عائد كلِّي ثابت، وهكذا فإن علاقة الاستهلاك بسعر الفائدة قد تكون موجبة وليست سالبة.

كما أن تغيّرات سعر الفائدة تؤثِّر في الاستهلاك عن طريق غير مباشر، فارتفاع سعر الفائدة مثلاً يؤدِّي إلى خفض الاستثمار وهذا بدوره يؤدِّي إلى نقص الدخل ومن ثم نقص الاستهلاك والادخار [Farrel, 1959].

وتكون محصلة ما تقدم العلاقة الآتية:

$$\frac{\partial C}{\partial r} \gtreqless 0$$

حيث r = سعر الفائدة

C = الإنفاق الاستهلاكي

وتوضِّح هذه العلاقة أنه يصعب الجزم بها إذا كانت تغيّرات سعر الفائدة ترتبط ارتباطًا

طرديًا أو عكسيًا (أو لاترتبط على الإطلاق) بمستوى الإنفاق الاستهلاكي .

(١٠ - ٣ - ٣) قيمة الأصول المالية (أثر بيجو)

أوضحت الدراسات القياسية العديدة أن هناك علاقة ارتباط موجبة قوية بين رصيد الأصول المالية والإنفاق الاستهلاكي ، فالأفراد الذين يملكون مثل هذه الأصول يكون إنفاقهم الاستهلاكي أكبر نسبيًا ؛ إلا أن الأثر الأهم يرجع إلى تغيّر المستوى العام للأسعار، فإذا تغيّر المستوى العام للأسعار تغيّرت القوة الشرائية للأصول الرأسمالية ذات القيمة النقدية الثابتة [Denburg, 1969]. فانخفاض المستوى العام للأسعار يؤدّي إلى رفع القيمة الحقيقية لهذه الأصول مما قد ينتج عنه انتقال في دالة الاستهلاك إلى أعلى والعكس صحيح ، وتعرف هذه الظاهرة باسم أثر بيجو (Pigou effect) ، وهكذا يمكن صياغة دالة الاستهلاك كالآتي :

$$C_t = a + b\,Y_t + h\left(\frac{A}{P}\right)_{t-1}$$

حيث C_t = الاستهلاك في الفترة t

Y_t = الدخل في الفترة t

$\left(\frac{A}{P_{t-1}}\right)$ = القيمة الحقيقية للأصول المالية في الفترة $t - 1$

(١٠ - ٣ - ٤) أثر الإعلان على الميل للاستهلاك

لقد أصبح الإعلان التجاري من أهم سمات العلاقات التجارية في النظم الاقتصادية الحرة، إذ يستخدمه البائعون في إعطاء عملائهم ما يلزم من بيانات عن السلع التي ينتجونها وأسعار بيعها، كما يستخدم البائعون أسلوب الإعلان في توسيع نصيبهم من السوق أو في الدفاع عن حصتهم الحالية. وهكذا فإنه يمكن التمييز بين ثلاثة أنواع من الإعلان التجاري :

(i) إعلان بغرض الإعلام

(ii) إعلان بغرض المنافسة

(iii) إعلان بغرض الحماية

وباختبار أثر الإعلان التجاري على الميل للاستهلاك في دولة أستراليا توصَّل مؤلِّف هذا الكتاب إلى أن للنوع الأول من الإعلان أثر مهم على الميل للاستهلاك [Metwally and Tamaschke, August 1981]. فقد يشجع الإعلان الإعلامي على زيادة الجهد للحصول على دخل أكبر يُمَكِّنُ من شراء السلع الجديدة المعلن عنها، كما قد يؤدِّي هذا الإعلان إلى تقليل الميل للادخار، أو حتى إلى الاقتراض لتوفير الموارد اللازمة لشراء السلع المعلن عنها.

أما نوعا الإعلان الثاني والثالث فإن تأثيرهما ينحصر فقط في إعادة توزيع الأسواق بين البائعين وليس في زيادة الاستهلاك الكلِّي للمجتمع.

(١٠ - ٤) تمرينات

١) وضِّح ما إذا كانت دوال الإنتاج الآتية تطابق خصائص افتراض الدخل المطلق (حيث C تمثِّل الاستهلاك، Y تمثِّل الدخل).

$$C = a + bY \;;\; a > 0 \;;\; 0 < b < 1$$

$$C = ae^{-b/Y} \;;\; a > 0 \;;\; 0 < b < 1$$

$$C = a + by - hY^2 \;;\; a > 0, b > 0, 0 < h < b$$

٢) إذا كانت دالة الاستهلاك:

$$C = 0.80Y + 0.10W$$

حيث C تمثِّل الاستهلاك

Y تمثِّل الدخل

W تمثِّل الثروة

(ا) ماذا يحدث للميل المتوسط للاستهلاك إذا زاد الدخل بمقدار النصف بينما بقي رصيد الثروة ثابتًا؟

(ب) ماذا يحدث للميل المتوسط للاستهلاك إذا زاد رصيد الثروة بمقدار النصف بينما بقي مستوى الدخل على ما هو عليه؟

٣) قُدِّرت دالة الاستهلاك طبقًا لافتراض دورة الحياة، وهي تعطى بالمعادلة الآتية :

$$C_t = 0.045\, W_{t-1} + 0.05\, Y_t + 0.17 Y_{t-1}$$

(أ) احسب الميل الحدِّي للاستهلاك من الدخل في الفترة القصيرة وفي الفترة الطويلة .

(ب) استخدم الدالة في حساب قيمة الوزن المعطى للدخل الحالي .

٤) إذا كان الدخل الحالي يساوي نصف دخل القمة، وكان الميل الحدِّي للاستهلاك في الفترة الطويلة = ٠,٨ ، والاستهلاك التلقائي يساوي ١٠ ملايين، والإنفاق الاستهلاكي يساوي ١٦٥ مليون، احسب مستوى الدخل الحالي وكذلك الميل الحدِّي للاستهلاك في الفترة القصيرة طبقًا لافتراض الدخل النسبي .

٥) يرى أحد الاقتصاديين أن دالة الاستهلاك في اقتصاد ما تتبع افتراض الدخل النسبي وأنها تقدَّر كالآتي :

$$C = 0.12\bar{Y} + 0.8Y$$

المطلوب تقدير دوال الاستهلاك في الفترة القصيرة والفترة الطويلة علمًا بأن دخل القمة يساوي ٢٠٠ مليون .

٦) يرى أحد الاقتصاديين أن دالة الاستهلاك في اقتصاد ما تتبع افتراض الدخل النسبي ، فإذا كان الإنفاق الاستهلاكي يساوي ٣٢٠ مليون، والاستهلاك التلقائي يساوي ٢٠ مليونًا، والميل الحدِّي للاستهلاك في الأجل الطويل يساوي ٠,٨ ، احسب قيمة الدخل الحالي .

٧) بافتراض أن دالة الادخار تساوي :

$$S = -100 + 0.4Y_d$$

وأن الميل المتوسط للاستهلاك من الدخل القومي يساوي 0.55 ، وأن الضرائب نسبية . احسب مستوى الاستثمار والدخل عند التوازن .

الفصل الحادي عشر

الاستثمار

(١١ - ١) تعاريف

يتميَّز الإنفاق الاستثماري عن غيره من أنواع الإنفاق لعدد من الأسباب نذكر منها:

(i) يؤدِّي الإنفاق الاستثماري إلى خلق طلب كلِّي جديد، وفي الوقت نفسه يضيف إلى طاقة المجتمع الإنتاجية.

(ii) يخضع الإنفاق الاستثماري لتوقعات أصحاب الأعمال وغالبًا ما تؤدِّي هذه التوقعات إلى حدوث تقلبات اقتصادية.

(iii) يتكون الإنفاق الاستثماري من مجموعة من الإنفاقات غير المتجانسة، ولكل منها نظرية خاصة به، ولا توجد نظرية فردية عامة تحكم جميع أنواع الإنفاق الاستثماري [Dolan, 1980].

ويعرف الاستثمار بأنه الإضافة لرصيد المجتمع من رأس المال، ويشمل هذا الرصيد:

(i) جميع التحسينات التي أجريت للتربة من جسور وقنوات وطرق. . . إلخ.

(ii) جميع المباني والتشييدات.

(iii) العِدَدْ والآلات التي في أيدي المنتجين.

(iv) المخزون من السلع.

فإذا رمزنا لرصيد رأس المال بالرمز K ورمزنا للاستثمار بالرمز I فإننا نحصل على:

$$I = \frac{dk}{dt}$$

(١١ ـ ٢) الكفايـة الحديـة لـرأس المـال

يعـرف الاقتصادي كينز معدّل الكفاية الحدِّية لرأس المال بأنه معدّل الخصم الذي يحقِّق التساوي بين الأرباح الصافية المتوقعة من الاستثمار خلال فترة حياته وتكلفة هذا الاستثمار. فإذا رمزنا لمعدّل الكفاية الحدِّية لرأس المال بالرمز r ، ولصافي الأرباح المتوقعة خلال فترة حياة الأصل بالرموز $R_1, R_2, ..., R_n$ (بافتراض أن الاستثمار يستمر عدد n من السنوات)، ولو رمزنا لثمن الاستثمار بالرمز V ، فإننا نحصل على

$$V = \frac{R_1}{1+r} + \frac{R_2}{(1+r)^2} + ... + \frac{R_n}{(1+r)^n} \qquad ... (1)$$

وتشير عبارة «الحدِّية» إلى الاستثمار الحدِّي؛ أي الاستثمار الذي لم يقيم بعد، ولكن يتمتع بأكبر عائد بالنسبة للاستثمارات التي لم تقم بعد؛ أي في متناول المستثمرين.

ويتضح من المعادلة أن معدّل الكفاية الحدِّية لرأس المال يتناسب تناسبًا طرديًا مع صافي الأرباح المتوقعة، ويتناسب تناسبًا عكسيًا مع ثمن الأصل. وتفترض النظرية أن زيادة الاستثمار في أي أصل تؤدِّي إلى انخفاض الأرباح المتوقعة من هذا الأصل، وإلى ارتفاع في ثمن الأصل؛ أي أن:

$$\frac{dV}{dI} > 0 \qquad ... (2)$$

$$\frac{dR_i}{dI} < 0 \qquad ... (3)$$

وحيث إن معدّل الكفاية الحدِّية لرأس المال يتوقف على ثمن الاستثمار والأرباح المتوقعة فإنه يمكننا أن نعبِّر عن هذه العلاقة كالآتي:

$$r = r\,(V, R_1, R_2, \ldots, R_n) \qquad \ldots (4)$$

وبالتفاضل الكلِّي نحصل على :

$$dr = \frac{\partial r}{\partial V} dV + \frac{\partial r}{\partial R_1} dR_1 + \frac{\partial r}{\partial R_2} dR_2 + \ldots + \frac{\partial r}{\partial R_n} dR_n$$

$$dr = \frac{\partial r}{\partial V} dV + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial r}{\partial R_i} dR_i \qquad \ldots (5)$$

ومن هذه المعادلة الأخيرة نحصل على :

$$\frac{dr}{dI} = \frac{\partial r}{\partial V}\frac{dV}{dI} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial r}{\partial R_i}\frac{dR_i}{dI} \qquad \ldots (6)$$

ويتَّضح من المعادلات (2) ، (3) ، (6) أن :

$$\frac{dr}{dI} < 0 \qquad \ldots (7)$$

أي أن منحنى الكفاية الحدِّية لرأس المال ينحدر إلى أسفل نحو اليمين ، وكثيراً ما يطلق على هذه العلاقة منحنى الكفاية الحدِّية للاستثمار (حيث إن العلاقة تحتوي على الاستثمار وليس رأس المال) ويمكن التعبير عن هذه العلاقة بمعادلة خطِّية كالآتي :

$$I = \gamma - gr \qquad \ldots (8)$$

ويقوم الاستثمار إذا كان صافي العائد المتوقع منه يساوي على الأقل سعر الفائدة السوقي الذي يستطيع المستثمر أن يحصل عليه بشراء أصل مالي (أو الذي يدفع بموجبه دين قائم) ؛ أي أن مستوى الاستثمار يتحدد عند التوازن ، عندما يتساوى سعر الفائدة السوقي (i) مع معدّل الكفاية الحدِّية لرأس المال (r) ؛ وهكذا يمكن صياغة دالة الاستثمار كالآتي :

$$I = \gamma - \delta\, i \qquad \ldots (9)$$

ويتضح أن علاقة الاستثمار بسعر الفائدة علاقة عكسية حيث إن :

$$\frac{dI}{di} = -\delta < 0 \qquad \ldots (10)$$

وتمثّل δ درجة استجابة الاستثمار لتغيّرات سعر الفائدة $(0 > \delta)$.

(١١ - ٣) الاستثمار ورصيد رأس المال المرغوب

يعتقد أصحاب الأعمال أن هناك رصيدًا أمثل لرأس المال يحقّق لهم أقصى ربح ممكن. إلا أن هذا الرصيد المرغوب لايمكن الوصول إليه فورًا؛ لأن قرارات الاستثمار تأخذ وقتًا طويلاً لتنفيذها لذلك يحاول أصحاب الأعمال أن يصلوا إلى رصيدهم المرغوب خلال الزمن، فيسعوا إلى تغطية جزء من الفجوة بين الرصيد المرغوب والرصيد الفعلي كل فترة زمنية [Solow, 1963].

فلو رمزنا لرصيد رأس المال المرغوب بالرمز K^*، ولرصيد رأس المال في الفترة الحالية بالرمز K، ورمزنا لرصيد رأس المال في نهاية الفترة السابقة بالرمز K_{-1} فإننا نحصل على :

$$K - K_{-1} = \lambda (K^* - K_{-1}) \qquad \ldots (1)$$

وتشير هذه المعادلة إلى أن أصحاب الأعمال يحاولون أن يغطوا نسبة (λ) من الفجوة بين الرصيد المرغوب والرصيد العام السابق؛ وحيث إن :

$$I = K - K_{-1} \qquad \ldots (2)$$

فإنه بالتعويض من المعادلة (2) في المعادلة (1) نحصل على :

$$I = \lambda (K^* - K_{-1}) \qquad \ldots (3)$$

ويطلق على المعـادلة رقم (3) المعجل المرن. وتشير هذه المعادلة إلى أن حجم الاستثـمار يزداد إذا زادت الفجـوة بين رصيد رأس المـال الفعـلي والـرصيد المرغوب [Ott, 1975].

(١١ ـ ٤) معجـل الاستثمـار

يشير معجل الاستثمار إلى العلاقة بين المبيعات النهائية والاستثمار، ويقوم مبدأ المعجل على فكرة أن هناك رصيدًا من رأس المال يتمشى مع كل مستوى من المبيعات، فيحاول البائعون أن ينظموا رصيدهم الرأسمالي بحيث يتمشى مع حجم المبيعات، ويمكن توضيح علاقة المعجل على مستوى الاقتصاد الكلِّي بالعلاقة الخطية الآتية:

$$I_t = v\,(C_t - C_{t-1}) \qquad \ldots (1)$$

وتوضِّح هذه العلاقة أن الاستثمار في الفترة t يتوقف على معدّل التغيّر في الإنفاق الاستهـلاكي بين الفـترة الحـالية والفـترة السـابقـة، ويمثِّـل الثابت v قيمة المعجل [Arrow, 1960].

وحيث إن الإنفـاق الاستهلاكي يتوقّف على الدخل، كما سبق أن رأينا، فإن العلاقة (1) يمكن إعادة صياغتها كالآتي:

$$I_t = v\,(Y_t - Y_{t-1}) \qquad \ldots (2)$$

وتوضِّح هذه المعادلة أن الاستثمار دالة للتغيّر في الدخل، أو

$$I_t = I_t\left(\frac{dY}{dt}\right) \qquad \ldots (3)$$

ولما كانت قرارات الاستثمار تأخذ وقتًا طويلاً حتى يتم تنفيذها، فإن العلاقة (2) عادة ما تكون أكثر تباطؤًا، وقد تأخذ الصيغة التالية [Hicks, 1950].

$$I_t = v\,(Y_{t-1} - Y_{t-2}) \qquad \ldots (4)$$

(١١ ـ ٥) تفاعل المضاعف والمعجل

لقد أوضح الاقتصادي ساميلسون [Samuelson, 1939] أن تفاعل المضاعف والمعجل من الممكن أن يؤدِّي إلى حدوث تقلبات اقتصادية، فبافتراض أن:

Y_t = الدخل القومي في الفترة t

C_t = الاستهلاك في الفترة t

I_t = الاستثمار (المشتق) في الفترة t

G_t = الإنفاق الحكومي في الفترة t

α, γ = ثوابت

وبافتراض أن النظام الاقتصادي يعبَّر عنه بالمعادلات الآتية:

$$G_t = G \tag{1}$$

$$Y_t = C_t + I_t + G \tag{2}$$

$$C_t = \gamma\, Y_{t-1}; \; (0 < \gamma < 1) \tag{3}$$

$$I_t = \alpha\, (C_t - C_{t-1}); \; (\alpha > 0) \tag{4}$$

فإنه طبقًا للمعادلة (1) يكون الإنفاق الحكومي متغيّرًا خارجيًا يتحدد خارج النظام ويحمل داخل هذا النظام قيمة ثابتة تساوي G.

وطبقًا للمعادلة (2) يتحدَّد الدخل بمجموع الإنفاق الاستهلاكي، والإنفاق الاستثماري، والإنفاق الحكومي.

أما المعادلة (3) فتوضِّح أن الميل الحدِّي للاستهلاك يساوي γ، وأن الاستهلاك في الفترة الحالية يتأثر في تغيّراته بقيم الدخل في الفترة السابقة.

وتوضِّح المعادلة (4) أن الطلب على السلع الاستثمارية يشتق من الطلب على السلع الاستهلاكية حيث α تمثِّل المعجل الذي يحدِّد العلاقة بين التغيّر في الإنفاق

الاستثماري والاستهلاك .

وبالتعويض من المعادلة (3) في المعادلة (4) نحصل على :

$$I_t = \alpha\,[(\gamma\, Y_{t-1}) - (\gamma\, Y_{t-2})]$$

أو:

$$I_t = \alpha\,\gamma\,(Y_{t-1} - Y_{t-2}) \qquad \dots (5)$$

وبالتعويض من المعادلات (5) ، (3) في المعادلة (2) نحصل على :

$$Y_t = \gamma\,(1+\alpha)\,Y_{t-1} - \alpha\,\gamma\,Y_{t-2} + G \qquad \dots (6)$$

ويتّضح أن المعادلة الأخيرة معادلة فروق من الرتبة الثانية يمكن حلها بالطرق المعروفة فنحصل على :

$$Z = \frac{G}{1-\gamma\,(1+\alpha)-(-\alpha\,\gamma)} = \frac{G}{1-\gamma} \qquad \dots (7)$$

حيث Z تمثّل مستوى الدخل التوازني Gk وحيث

$$k = \frac{1}{1-\gamma}$$

تعبّر عن المضاعف .

وتكون المعادلة المساعدة للمعادلة (6):

$$x^2 - \gamma\,(1+\alpha)\,x + \alpha\,\gamma = 0 \qquad \dots (8)$$

ونحصل لهذه المعادلة على الجذرين :

$$x_1 = \frac{\gamma\,(1+\alpha) + \sqrt{(\gamma\,(1+\alpha))^2 - 4\,\alpha\,\gamma}}{2} \qquad \dots (9)$$

$$x_2 = \frac{\gamma(1+\alpha) - \sqrt{(\gamma(1+\alpha))^2 - 4\alpha\gamma}}{2} \qquad (10)$$

ويتوقف المسار الزمني للدخل على قيم x_1 ، x_2 ويمكن التمييز بين ثلاث حالات:

١ - *أن الجذرين x_1 ، x_2 حقيقيان ومتميزان*

في هذه الحالة يمكننا أن نضع:

$$x_1 x_2 = \frac{\alpha\gamma}{1}$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{[-\gamma(1+\alpha)]}{1} = \gamma(1+\alpha)$$

وحيث إن $0 < \alpha$ ، $0 < \gamma$ ، $0 < \gamma(1+\alpha) > 0$ فإن:

$$x_1 x_2 > 0$$

$$x_1 + x_2 > 0$$

وهكذا يكون كل من x_1 ، x_2 كميات موجبة، وفي هذه الحالة لن تحدث تقلبات في المسار الزمني للدخل.

فإذا كانت $x_1 > 0$ ، $x_2 > 0$ ، $1 > x_1 > x_2$ حيث x_1 ترمز للجذر المسيطر. فإننا نحصل على اقتراب من دخل التوازن، ويماثل هذا الشرط $\alpha\gamma < 1$ ؛ لأنه إذا كانت $1 > x_1 > x_2$ فإن $x_1 x_2 < 1$ ، وهذا معناه أن $\alpha\gamma < 1$.

أما إذا كانت $x_1 > 0$ ، $x_2 > 0$ ، ولكن الشرط $1 > x_1 > x_2$ لا يتحقق، فإن المسار الزمني للدخل سوف يبعد أكثر فأكثر عن التوازن [Glahe, 1977].

٢ - *أن الجذرين x_1 ، x_2 حقيقيان ولكن متساويان*

في هذه الحالة نحصل على:

$$x = x_1 = x_2 = \frac{\gamma(1+\alpha)}{2}$$

ومن ثم فإن:

$$\gamma^2 (1 + \alpha)^2 = 4 \alpha\gamma$$

$$\gamma = \frac{4\alpha}{(1 + \alpha)^2}$$

ويتبع ذلك:

$$x = \frac{4\alpha}{(1+\alpha)^2} \quad \frac{1+\alpha}{2} = \frac{2\alpha}{1+\alpha} > 0$$

لاقتراب المسار الزمني من مستوى التوازن لابد أن يتحقق:

$$\text{(i)} \qquad x < 1$$

$$\text{(ii)} \qquad \frac{2\alpha}{1 + \alpha} < 1$$

أو

$$2\alpha < 1 + \alpha$$

أو

$$\alpha < 1$$

ولابتعاد المسار الزمني عن مستوى التوازن لابد أن تكون $x > 1$ وهذا يعني $\alpha > 1$ [Harrod, 1949].

٣ ـ *إذا كانت x_1 و x_2 جذورًا مركبة*

تكون هناك تقلبات في المسار الزمني للدخل، ويمكن التمييز بين ثلاثة أنواع من التقلبات:

(i) تقلبات متلاشية تؤدِّي إلى اقتراب الدخل من مستوى التوازن، ويحدث هذا إذا كانت القيم المطلقة للجذور أقل من واحد وهذا يعني

$$\alpha\gamma < 1$$

(ii) تقلبات انفجارية تؤدّي إلى ابتعاد الدخل عن مستوى التوازن، ويحدث هذا إذا كانت القيم المطلقة للجذور أكبر من واحد، ويعني ذلك

$$\alpha \gamma > 1$$

(iii) تقلبات منتظمة ومستمرة وذات موجات متساوية إذا كانت القيم المطلقة للجذور تساوي واحدًا، ويعني ذلك

$$\alpha \gamma = 1$$

وبتحوير نموذج ساميلسون وجعل الاستثمار دالة للتغيّر في الدخل بدلاً من التغيّر في الإنفاق الاستهلاكي نحصل على:

$$Y_t = C_t + I_t + G_t$$
$$C_t = a + b\,Y_{t-1}$$
$$I_t = v\,(Y_{t-1} - Y_{t-2})$$

ويعطي هذا النموذج الحل:

$$Y_t = (b + v)\,Y_{t-1} - v\,Y_{t-2} + a + G_t$$

وعند التوازن نحصل على:

$$Y_t = Y_{t-1} = Y_{t-2}$$

ونحصل من الحل على:

$$Y_t = \frac{a + G}{1 - b}$$

ويمكن تحديد المسار الزمني للدخل الذي يعطيه هذا النموذج تبعًا لقيم b ، v ، ونستطيع أن نميِّز بين خمس حالات:

الحالة أ :

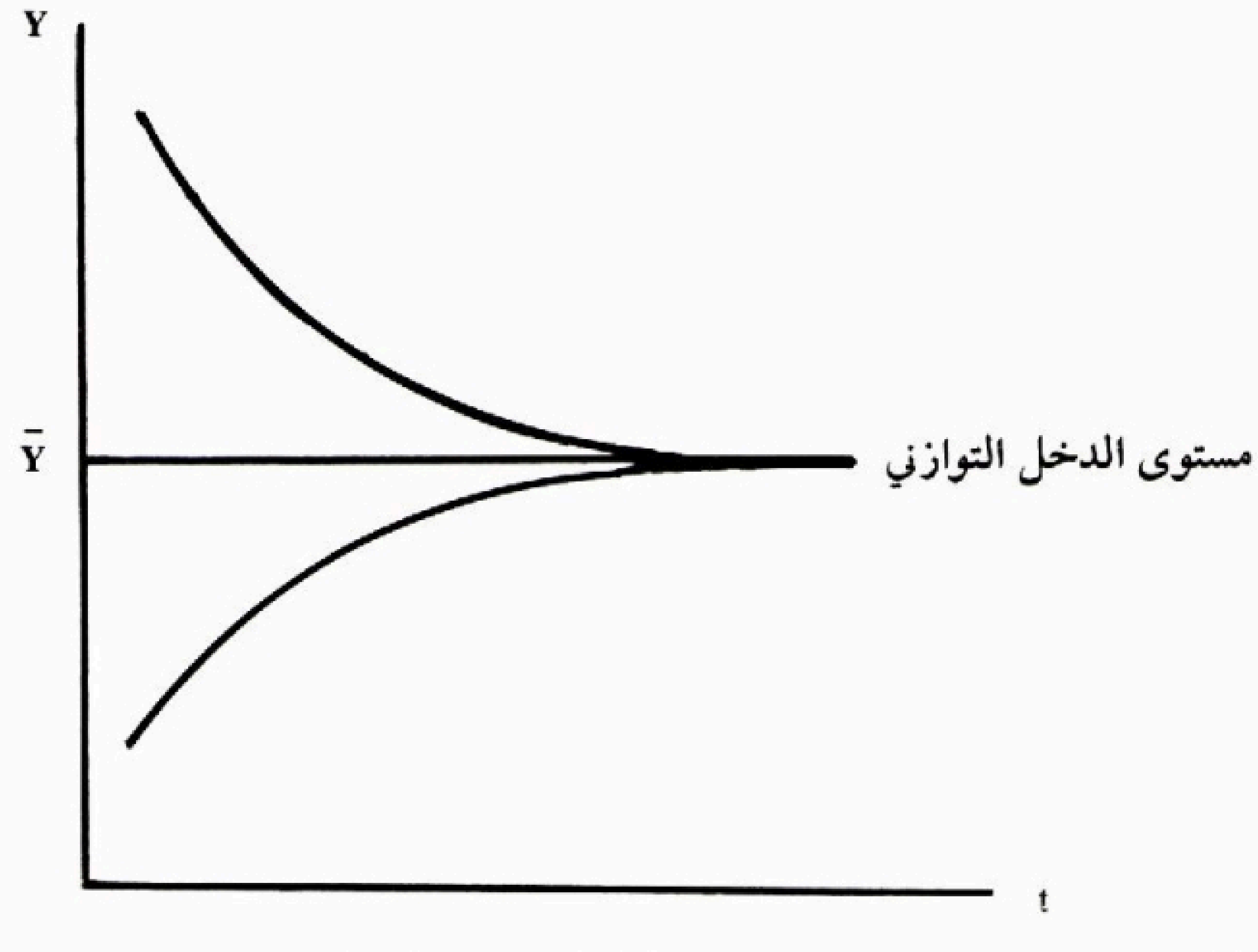
إذا كانت

$$v < 1$$

وكانت

$$b \geqslant 2\sqrt{v} - v$$

فإننا نحصل في هذه الحالة على مسار زمني يتجه باستمرار ناحية التوازن، كما يتَّضح من الشكل البياني رقم (١١ ـ ١).



شكل رقم (١١ ـ ١)

الحالة ب :

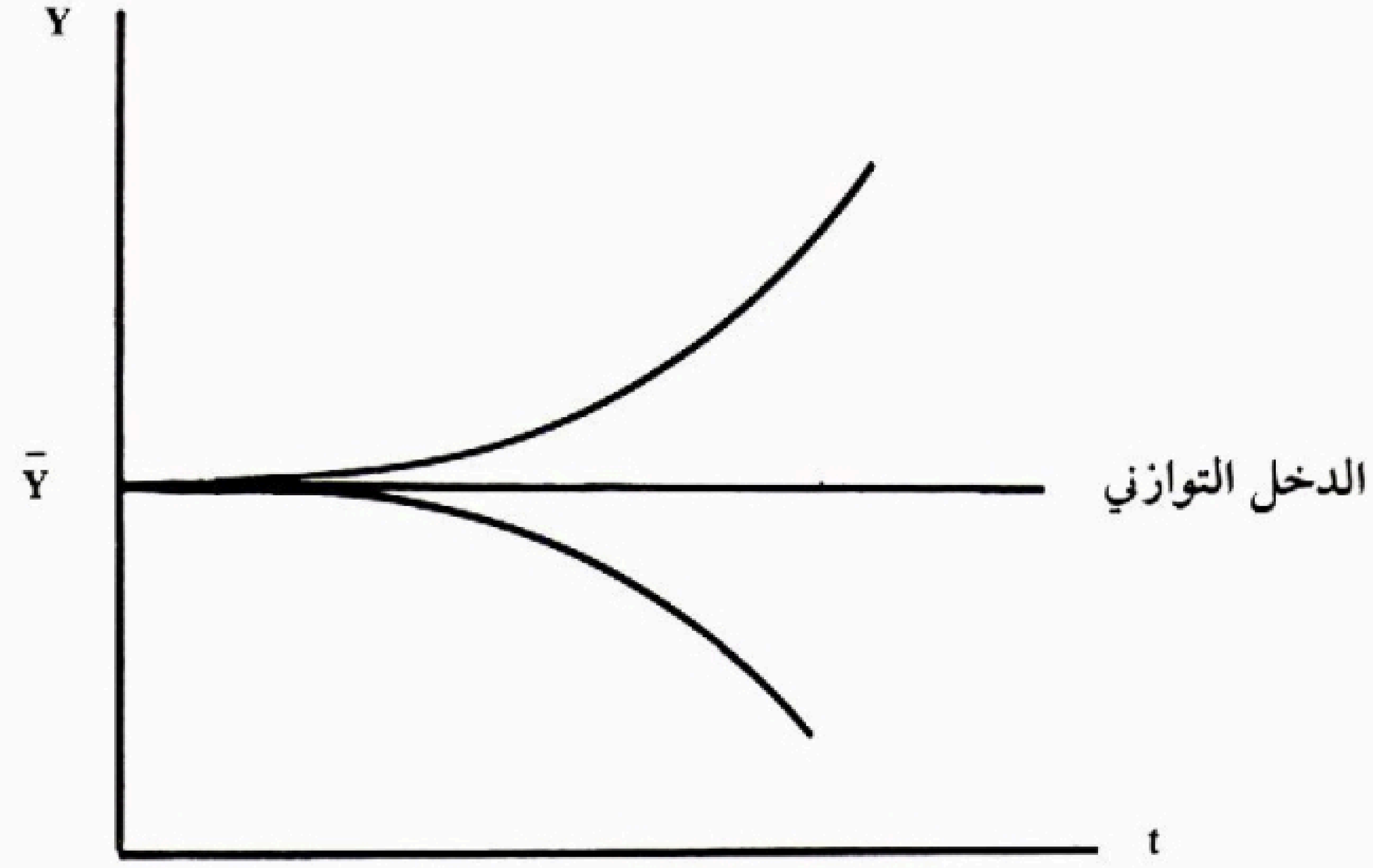
إذا كانت

$$v > 1$$

وكانت

$$b \geqslant 2\sqrt{v} - v$$

فإننا نحصل في هذه الحالة على مسار زمني يبعد باستمرار عن المستوى التوازني، كما يتّضح من الشكل البياني رقم (١١ ـ ٢).



شكل رقم (١١ ـ ٢)

الحالة جـ:

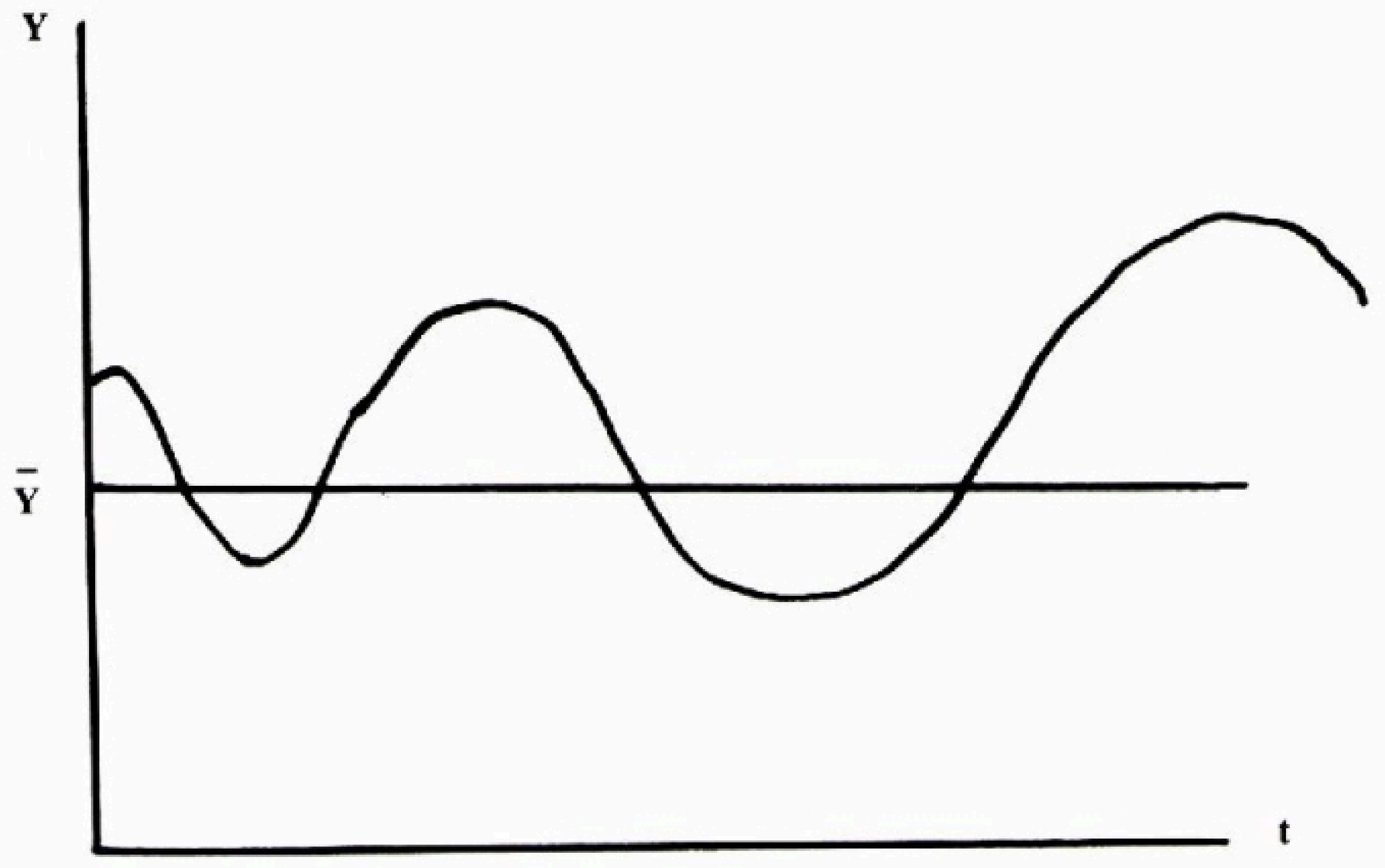
إذا كانت

$$v > 1$$

وكانت

$$b < 2\sqrt{v} - v$$

ففي هذه الحالة تحدث للدخل تقلبات انفجارية تبعد أكثر فأكثر عن مستوى الدخل التوازني، كما يتّضح من الشكل البياني رقم (١١ ـ ٣).



شكل رقم (١١ ـ ٣)

الحالة د :

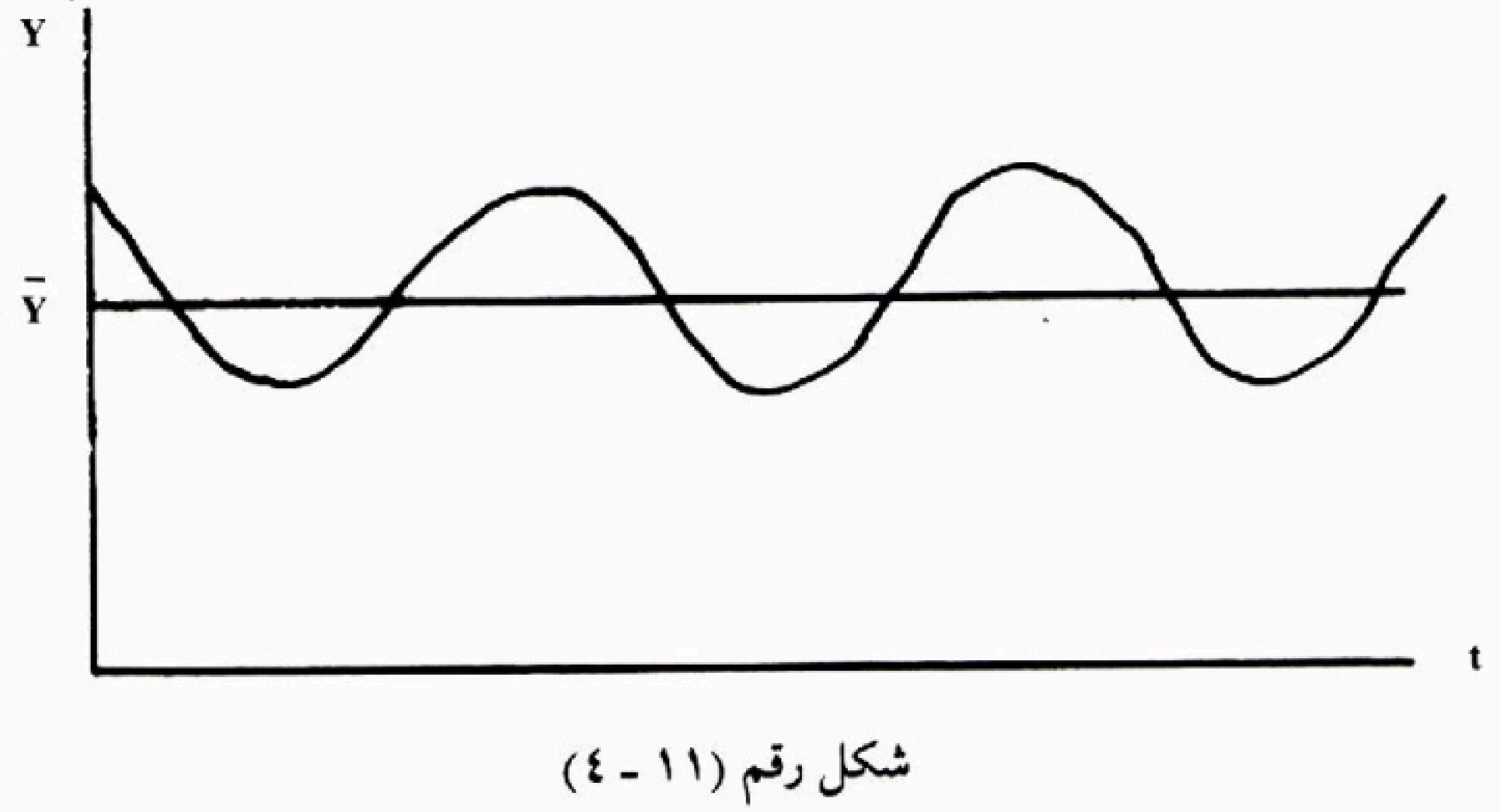
إذا كانت

$$v = 1$$

وكانت

$$b < 2\sqrt{v} - v$$

ففي هذه الحالة يحدث للدخل تقلبات مستمرة (لا نهائية) ذات موجات متساوية كما يتضح من الشكل رقم (١١ ـ ٤).



شكل رقم (١١ ـ ٤)

الحالة هـ :

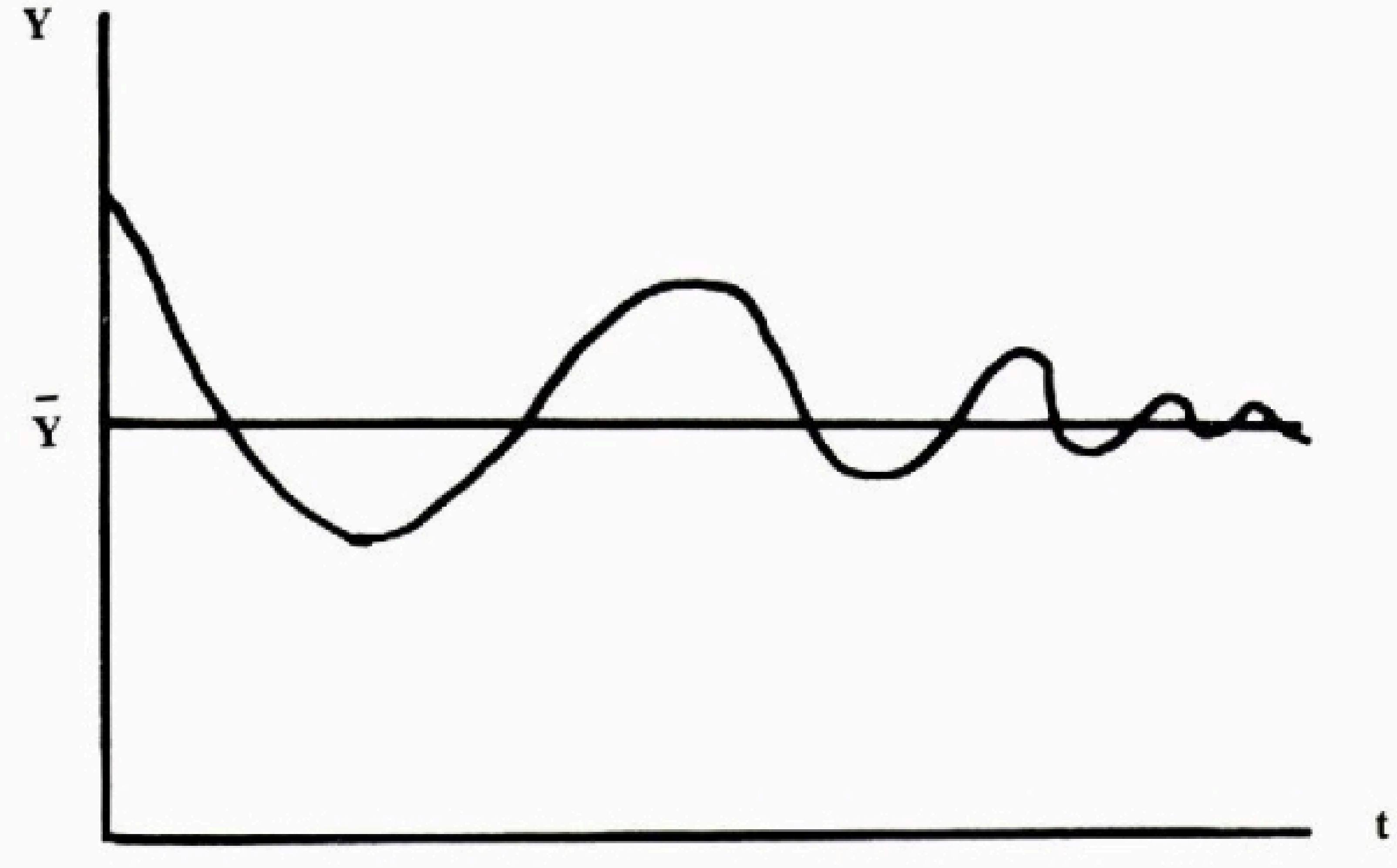
إذا كانت

$$v < 1$$

وكانت

$$b < 2\sqrt{v} - v$$

ففي هذه الحالة تحدث للدخل تقلبات تتباطأ تدريجيًا وتتلاشى حول الدخل التوازني كما يتضح من الشكل رقم (١١ ـ ٥).



شكل رقم (١١ ـ ٥)

ويمكن تحديد المسار الزمني للدخل بافتراض النموذج المبسط الآتي :

$$Y_t = C_t + I_t + G_t$$

$$C_t = 0.5\, Y_{t-1}$$

$$I_t = 0.8\,(Y_{t-1} - Y_{t-2})$$

$$G_{t-2} = G_{t-1} = 110$$

$$G_t = G_{t+1} = G_{t+2} = \dots = G_{t+n} = 100$$

فإذا افترضنا أن

$$Y_{t-3} = Y_{t-2} = Y_{t-1}$$

حصلنا على:

$$\begin{aligned} Y_{t-1} &= C_{t-1} + I_{t-1} + G_{t-1} \\ &= 0.5\, Y_{t-2} + 0.8\,(Y_{t-2} - Y_{t-3}) + 110 \\ &= 0.5\, Y_{t-1} + 110 \end{aligned}$$

$$\therefore 0.5\, Y_{t-1} = 110$$

$$\therefore Y_{t-1} = Y_{t-2} = Y_{t-3} = 220$$

ويوضِّح الجدول الآتي المسار الزمني للدخل الذي يمثِّله هذا النموذج الافتراضي.

ولما كانت $v = 0.8$ فإن $\sqrt{v} = 0.894$ وحيث إن $b = 0.5$

فإننا نحصل على:

$$b - 2\sqrt{v} + v = 0.5 - 1.789 + 0.894$$

أي أن:

$$v < 1$$

وكذلك

$$b < 2\sqrt{v} - v$$

وهكذا نحصل على تقلبات متباطئة تتلاشى تدريجيًّا حول مستوى التوازن، كما يتَّضح من بيانات الجدول رقم (١١ ـ ١)، ويلاحظ أن مستوى الدخل التوازني طبقًا لهذا النموذج يساوي 200.

t	C_t	I_t	G_t	Y_t	ΔY
−3	110	−	110	220	−
−2	110	0	110	220	0
−1	110	0	110	220	0
t	110	0	100	210	−10
t+ 1	105	− 8	100	197	−13
t+ 2	98.5	−10.4	100	188.1	− 8.9
t+ 3	94.05	− 7.12	100	186.93	− 1.17
t+ 4	93.465	− .936	100	192.529	5.599
t+ 5	96.265	4.479	100	200.744	8.215
t+ 6	100.372	6.572	100	206.944	6.2
t+ 7	103.472	4.96	100	208.432	1.488
t+ 8	104.216	1.190	100	205.406	− 3.026
t+ 9	102.703	− 2.421	100	200.282	− 5.124
t+10	100.141	− 4.099	100	196.042	− 4.24
t+11	98.021	− 3.392	100	194.629	− 1.413
t+12	97.315	− 1.130	100	196.185	1.556
t+13	98.093	1.245	100	199.337	3.153
t+14	99.669	2.522	100	202.191	2.854
t+15	101.096	2.283	100	203.378	1.187
:					
t+n	100	0	100	200	0

جدول رقم (١١ ـ ١). المسار الزمني للدخل

(١١ - ٦) تمرينات

١) استخدم المعلومات الآتية في توضيح كيف يؤدِّي تداخل المضاعف والمعجل إلى خلق التقلبات الاقتصادية، ووضِّح بالجدول (حتى الفترة $t + 5$) وبالرسم البياني المسار الزمني للدخل.

$$Y_t = C_t + I_t + G_t$$
$$C_t = 10 + 0.8\, Y_{t-1}$$
$$I_t = 0.5\, (Y_{t-1} - Y_{t-2})$$
$$G_{t-1} = G_{t-2} = 6$$
$$G_t = G_{t+1} = G_{t+2} = \ldots = G_{t+n} = 8$$
$$Y_{t-3} = Y_{t-2} = Y_{t-1}$$

٢) افترض العلاقات الآتية:

$$C_t = 8 + b\, Y_{t-1}$$
$$I_t = I_0 + v\, (Y_{t-1} - Y_{t-2})$$
$$Y_t = C_t + I_t + G_t$$

بافتراض أن سلوك الاقتصاد الممثل بالعلاقات أعلاه يمكن وصفه بالمعادلة:

$$Y_t = G_t + 20 + 1.5\, Y_{t-1} - Y_{t-2}$$

حدِّد قيمة المعجل، والميل الحدِّي للاستهلاك والاستثمار التلقائي، ثم وضِّح بيانيًا سلوك الدخل إذ حدث تغيّر في الإنفاق التلقائي.

٣) افترض في اقتصاد ما النموذج الآتي:

$$Y_t = C_t + I_t + G_t$$
$$C_t = 10 + 0.5\, Y_{t-1}$$
$$I_t = 20 + 0.8\, (Y_{t-1} - Y_{t-2})$$

بافتراض أن الإنفاق الحكومي في الفترة الحالية نقص عما كان عليه في الفترتين السابقتين بمقدار مليونين ليصبح مساويًا ٨ ملايين، ويستمر على ذلك في الفترات المقبلة. احسب التغيّرات التي تحدث في الدخل خلال الفترات الخمس المقبلة، علمًا بأنه لم يطرأ أي تغيّر على الدخل خلال الفترات الثلاث السابقة، ثم وضِّح بالرسم البياني المسار الزمني للدخل.

الفصل الثاني عشر

توازن الطلب الكلي

يتحقَّق توازن الطلب الكلِّي عندما يتحقق التوازن الآنيْ في سوقيْ السلع والنقد.

(١٢ ـ ١) التوازن في سوق السلع

المنحـــنى IS

إذا كان لدينا اقتصاد ذو أربعة قطاعات (أي اقتصاد مفتوح) فإننا نحصل من متطابقة الدخل على:

$$Y = C + I + G + X - IM \qquad \ldots (1)$$

حيث:

Y = الدخـل

C = الاستهلاك

I = الاستثمار

G = الإنفاق الحكومي

X = الصادرات

IM = الواردات

وبافتراض دالة الاستهلاك:

$$C = a + b\,(Y - T) \qquad \ldots (2)$$

حيث :

a = الإنفاق الاستهلاكي التلقائي

b = الميل الحدِّي للاستهلاك

T = ضرائب الدخل

وبافتراض دالة الاستثمار الآتية :

$$I = \gamma - \delta i \quad \dots (3)$$

حيث :

γ = الاستثمار التقائي

δ = الميل الحدِّي للاستثمار بالنسبة لسعر الفائدة

i = سعر الفائدة

وبافتراض دالة الواردات :

$$IM = e + \sigma Y \quad \dots (4)$$

حيث :

e = الاستيراد التلقائي

σ = الميل الحدِّي للاستيراد

وبافتراض دالة الضرائب :

$$T = tY - g \quad \dots (5)$$

حيث :

t = معدّل ضريبة الدخل

g = الإعانات لمحدودي الدخل

وإذا افترضنا أن الإنفاق الحكومي والصادرات متغيّرات مستقلة أو :

$$G = \bar{G}$$
$$X = \bar{X}$$

فإنه يمكننا حل النظام أعلاه، وإيجاد علاقة تربط بين الدخل (Y) وسعر الفائدة (i).

وبالتعويض من المعادلة (5) في المعادلة (2) نحصل على:

$$C = a + bg + (1 - t)\, bY \qquad \ldots (6)$$

وبالتعويض من المعادلات (3)، (4)، (6) في المعادلة (1) نحصل على:

$$Y = a + bg + (1 - t)\, bY + \gamma - \delta i - e - \sigma Y + G + X$$

أو:

$$Y\,(1 - b + bt + \sigma) = a + bg + \gamma - \delta i - e + G + X$$

وهكذا فإن:

$$Y = \frac{a + b\,g + \gamma - \delta i - e + G + X}{1 - b + bt + \sigma} \qquad \ldots (7)$$

وكذلك:

$$i = \frac{Y\,(-1 + b - bt - \sigma) + a + bg + \gamma - e + G + X}{\delta} \qquad \ldots (8)$$

وتمثِّل المعادلتان (7)، (8) المنحنى IS، ويتحدَّد ميل هذا المنحنى بالمعادلة:

$$\frac{dY}{di} = \frac{-\delta}{1 - b + bt + \sigma} \qquad \ldots (9)$$

فإذا افترضنا أن:

$$\delta > 0;\ 0 < b < 1;\ t > 0;\ \sigma > 0$$

نحصل على:

$$\frac{dY}{di} < 0 \qquad \ldots (10)$$

أي أن ميل المنحنى IS يكون سالبًا، وبعبارة أخرى ينحدر المنحنى IS إلى أسفل نحو اليمين [Hicks, 1937].

ويمكن إيجاد أثر تغيّرات الميل الحدِّي للاستهلاك (b)، والكفاية الحدِّية للاستثمار (δ)، ومعدّل ضريبة الدخل (t)، والميل الحدِّي للاستيراد (σ)، وكذلك أثر التغيّرات في الإنفاق الحكومي التلقائي (G)، وفي الصادرات التلقائية (X) على المنحنى IS، وذلك بأخذ التفاضل الجزئي للمعادلة رقم (7) بالنسبة لكل من b، δ، t، e، G، X فنحصل على:

$$\frac{\partial Y}{\partial b} = \frac{g\,(1 - b + bt + \sigma) - (-1 + t)\,(a + bg + \gamma - \delta i - e + G + X)}{(1 - b + bt + \sigma)^2}$$

$$= \frac{g}{1 - b + bt + \sigma} - \frac{(t - 1)\,(a + bg + \gamma - \delta i - e + G + X)}{(1 - b + bt + \sigma)^2}$$

وبالتعويض من المعادلة (7) في هذه المعادلة الأخيرة نحصل على:

$$\frac{\partial Y}{\partial b} = \frac{Y - (t\,Y - g)}{1 - b + bt + \sigma} \qquad \ldots (11)$$

وبالتعويض من المعادلة (5) في المعادلة (11) نحصل على:

$$\frac{\partial Y}{\partial b} = \frac{Y - T}{1 - b + bt + \sigma} > 0 \qquad \ldots (12)$$

وتوضّح المعادلة رقم (12) أن الزيادة في الميل الحدّي للاستهلاك (b) سوف تؤدّي إلى انتقال في المنحنى IS إلى اليمين.

وبأخذ معامل التفاضل الجزئي للمعادلة (7) بالنسبة للمتغيّر δ نحصل على:

$$\frac{\partial Y}{\partial \delta} = \frac{-i}{1 - b + bt + \sigma} < 0 \qquad \dots (13)$$

أي أن زيادة درجة استجابة الاستثمار لتغيّرات سعر الفائدة من شأنها أن تؤدّي إلى انتقال المنحنى IS إلى اليسار، إذ أن الزيادة في δ تعني نقصًا في مستوى الاستثمار المقابل لكل سعر فائدة، مما يؤدّي (من خلال عملية المضاعف) إلى نقص الدخل [Patinkin, 1965].

أما أثر تغيّر معدّل ضريبة الدخل فيمكن تحديده من المعادلة الآتية:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{-(a + bg + \gamma - \delta i - e + G + X)(b)}{(1 - b + bt + \sigma)^2}$$

وبالتعويض من المعادلة (7) في هذه المعادلة الأخيرة نحصل على:

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{-b\,Y}{(1 - b + bt + \sigma)} < 0 \qquad \dots (14)$$

أي أن الزيادة في معدّل الضريبة تؤدّي إلى انتقال المنحنى IS إلى اليسار.

ولتحديد أثر تغيّر الميل الحدّي للاستيراد نفاضل المعادلة (7) جزئيًا بالنسبة للمتغيّر (σ) فنحصل على:

$$\frac{\partial Y}{\partial \sigma} = \frac{-(a + bg + \gamma - \delta i - e + G + X)}{(1 - b + bt + \sigma)^2}$$

وبالتعويض من المعادلة رقم (7) في المعادلة الأخيرة نحصل على :

$$\frac{\partial Y}{\partial \sigma} = \frac{-Y}{(1 - b + bt + \sigma)} < 0 \qquad \ldots (15)$$

أي أن زيادة الميل الحدِّي للاستيراد تؤدِّي إلى انتقال المنحنى IS إلى اليسار، فكلَّما زاد الجزء المنفق من الدخل القومي على السلع الأجنبية قلَّ الدخل.

ويمكن توضيح أثر زيادة الإنفاق الحكومي التلقائي والصادرات التلقائية من المعادلة :

$$\frac{\partial Y}{\partial G} = \frac{\partial Y}{\partial X} = \frac{1}{1 - b + bt + \sigma} \qquad \ldots (16)$$

ويتَّضح من هذه المعادلة أن لزيادة الإنفاق الحكومي التأثير نفسه على المنحنى IS الذي تحدثه زيادة الصادرات، حيث يؤدِّي ذلك إلى انتقال هذا المنحنى إلى اليمين.

(١٢ ـ ٢) التوازن في سوق النقد

المنحنى LM

يتحقَّق التوازن في سوق النقد عندما تتساوى الكمية المعروضة من النقود مع الطلب الكلِّي على النقود.

فإذا افترضنا أن عرض النقود تحدِّده السلطات النقدية، وأنه متغيِّر خارجي، فإنه يمكن كتابة :

$$M = \bar{M}$$

ويتطلَّب التوازن في سوق النقد أن يتساوى عرض النقود M مع الطلب على النقود. وتطلب النقود من أجل غرضين رئيسين: المعاملات (والاحتياطيات) والمضاربات، أما الطلب على النقود لدافع المعاملات فيرجع إلى حاجة الأفراد

والمنشآت للاحتفاظ بأرصدة نقدية (سائلة) لمواجهة المعاملات العادية بين فترات استلام الدخول. وهكذا فإن الطلب على النقود لدافع المعاملات يكون دالة للدخل ويمكن التعبير عنه رياضيًّا بالآتي :

$$M_t = \alpha Y \qquad \ldots (17)$$

إلا أن البعض يعتقد أن علاقة الطلب على النقود بدافع المعاملات بالدخل علاقة غير نسبية، وأنه طلب غير مرن بالنسبة لتغيّرات الدخل، مما يدل على وجود وفورات حجم في استخدام النقود، ويمكن التعبير عن هذا رياضيًّا بما يأتي :

$$M_t = \alpha_0 + \alpha Y$$

مع مراعاة أن :

$$\frac{d \ln M_t}{d \ln Y} < 1$$

إلا أننا سوف نستخدم المعادلة رقم (17) في تحليل هذا الطلب.

أما الطلب على النقود بغرض المضاربات فيؤثِّر في قرارات الأفراد بشأن تحديد محتويات حافظة أصولهم المالية وخاصة المفاضلة بين الاحتفاظ بنقد سائل أو بسندات حكومية. وهكذا فإن هذا الطلب على النقود يعتبر دالة لسعر الفائدة، فإذا كان سعر الفائدة مرتفعًا فإن ذلك سوف يشجِّع الأفراد على التضحية بالسيولة النقدية ؛ لأن تكلفة الاحتفاظ بالنقد سوف تكون عالية ؛ ومن ثم يقبل الأفراد على شراء السندات والعكس صحيح لو كان سعر الفائدة منخفضًا.

وطبقًا للنظرية والخبرة كلما كان سعر الفائدة مرتفعًا كانت أسعار السندات منخفضة. وهكذا إذا توقَّع الأفراد ارتفاع أسعار السندات (أي انخفاض أسعار الفائدة) فإنهم سوف يقبلون على شراء السندات والتضحية بالسيولة النقدية آملين في تحقيق أرباح رأسمالية عندما ترتفع أسعار السندات. والعكس صحيح ، فإذا كان سعر

الفـائدة الحالي منخفضًا وتوقع الأفراد ارتفاعه (أي توقعوا انخفاض قيمة السندات) مستقبلاً فإنهم سوف يمتنعون عن شراء السندات، ويحاولون التخلص مما لديهم من هذه السندات حتى لا يحققون خسائر رأسمالية؛ فيحولون سنداتهم إلى أرصدة نقدية، وبذلك تزداد نسبة النقد في حافظة الأصول.

ويمكن التعبير عن العلاقة بين الطلب على النقود بدافع المضاربات وسعر الفائدة بالمعادلة:

$$M_S = \beta - \varepsilon i \qquad \ldots (18)$$

ويتطلب شرط التوازن في سوق النقد تحقيق صحة المعادلة:

$$M = M_t + M_S \qquad \ldots (19)$$

أي يتساوى الطلب الكلي على النقود مع الكمية المعروضة منها.

وبالتعويض من المعادلتين (17)، (18) في المعادلة رقم (19) نحصل على:

$$M = \beta + \alpha Y - \varepsilon i \qquad \ldots (20)$$

وينتج عن هذه المعادلة الأخيرة أن:

$$Y = \frac{M - \beta + \varepsilon i}{\alpha} \qquad \ldots (21)$$

$$I = \frac{\beta + \alpha Y - M}{\varepsilon} \qquad \ldots (22)$$

وتمثّل هاتان المعادلتان المنحنى LM، والذي توضّح كل نقطة عليه المساواة بين عرض النقود والطلب عليها، ويتّضح أن هذا المنحنى يعطي علاقة بين الدخل وسعر الفائدة، ويمكن اشتقاق ميل هذا المنحنى كالآتي:

$$\frac{\partial i}{\partial Y} = \alpha/\varepsilon > 0 \qquad \dots (23)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial i} = \varepsilon/\alpha > 0 \qquad \dots (24)$$

ويتّضح أن ميل المنحنى LM موجب، ممّا يدل على أنه ينحدر إلى أعلى نحو اليمين. ويدل هذا أيضًا على أن العلاقة بين الدخل وسعر الفائدة التي يمثّلها هذا المنحنى علاقة طردية؛ فالزيادة في الدخل سوف تؤدّي إلى زيادة في الطلب على النقود لدافع المعاملات، فإذا كان عرض النقود ثابتًا قلّت الكمية المتوافرة لغرض المضاربات، مما يضطر المضاربون إلى تعويض النقص في السيولة عن طريق بيع السندات فيزداد عرض هذه السندات، وينخفض سعرها، ويرتفع سعر الفائدة.

لتحديد أثر زيادة عرض النقود على كلٍّ من الدخل وسعر الفائدة نفاضل جزئيًا المعادلتين (21) ، (22) بالنسبة للمتغيّر M فنحصل على:

$$\frac{\partial Y}{\partial M} = \frac{1}{\alpha} > 0 \qquad \dots (25)$$

$$\frac{\partial i}{\partial M} = \frac{-1}{\varepsilon} < 0 \qquad \dots (26)$$

وتوضّح المعادلتان الأخيرتان أن زيادة عرض النقود تؤدّي إلى زيادة الدخل وتخفيض سعر الفائدة، وذلك لأن زيادة عرض النقود تؤدّي إلى زيادة الأرصدة النقدية المحتفظ بها لأغراض المعاملات والمضاربات، فيضطر الأفراد إلى التخلص من السيولة الزائدة عن طريق شراء السندات. فيزداد الطلب على السندات ويرتفع سعرها؛ ومن ثمَّ ينخفض سعر الفائدة فيزيد الاستثمار بالتالي.

إلاّ أنَّ سعر الفائدة لايمكن أن ينخفض إلى الصفر. إذ أن زيادة عرض النقود لن يكون لها أي أثر على تخفيض سعر الفائدة بعد أن يصل هذا السعر إلى حدٍّ أدنى

معــينٍّ، فتؤول الــزيادة في عرض النقــود إلى الاكتنــاز أو يحتفظ بها سائلة لغـرض المضاربات. وهكذا فإن سعر الفائدة لايمكن أن يقلَّ عن حدٍّ أدنى موجب، ويرجع ذلك على الأقل لسببين:

(ا) طالما أن تكلفة الإقراض موجبة فلا يمكن أ ن ينخفض سعر الفائدة إلى الصفر.

(ب) حينما يصل سعر الفائدة إلى حدٍّ منخفض جدًّا يبدأ الأفراد في الاعتقاد بأنه لن ينخفض إلى أكثر من ذلك؛ أي يعتقدون أن أسعار السندات لايمكن أن ترتفع لأكثر من ذلك، فيمتنعون عن شراء السندات خشية الوقوع في خسائر رأسمالية؛ ومن ثمَّ يفضِّلون الاحتفاظ بالنقد سائلاً.

أي أن الـطلب على النقود لغرض المضاربات يصبح مرنًا مرونة لا نهائية عند أسعار الفائدة المنخفضة جدًّا، وبذلك تنعدم فعالية زيادة عرض النقود في التأثير على سعر الفائدة، وتعرف هذه الظاهرة بمصيدة السيولة.

(١٢ ـ ٣) المستوى التوازني للطلب الكلِّي

تعطي نقطة تقاطع المنحنيين IS ، LM المستوى التوازني للدخل وسعر الفائدة، فكل نقطة على المنحنى IS تمثِّل توازنًا في سوقٍ السلع، على حين تمثِّل كل نقطة على المنحنى LM توازنًا في سوق النقد. وهكذا يصبح لدينا معادلتان آنيتان في مجهولين: هما الدخل (Y) وسعر الفائدة (i)، وبحلِّ هاتين المعادلتين حلاً آنيًّا نحصل على مستوى الدخل وسعر الفائدة عند التوازن.

وبحلِّ المعادلتين (7) و(22) آنيًّا نحصل على:

$$Y = \frac{a + bg + \gamma - \delta/\varepsilon\,(\beta + \alpha\,Y - M) - e + G + X}{1 - b + bt + \sigma}$$

$$Y\,(1 - b + bt + \sigma) + (\alpha\,\delta/\varepsilon)\,Y = a + bg + \gamma - \delta\,\beta/\varepsilon + \delta M/\varepsilon - e + G + X$$

أو

$$Y\,(1 - b + bt + \sigma + \alpha\delta/\varepsilon) = a + bg + \gamma - e + G + X + \delta/\varepsilon\,(M - \beta)$$

وتعطي هذه المعادلة المستوى التوازني للطلب الكلّي :

$$Y = \frac{\varepsilon\,(a + bg + \gamma - e + G + X) + \delta\,(M - \beta)}{\varepsilon\,(1 - b + bt + \sigma) + \alpha\,\delta} \qquad \dots (27)$$

وبالتعويض من المعادلة (27) في المعادلة (22) نحصل على سعر الفائدة التوازني :

$$i = \frac{\beta}{\varepsilon} + \frac{\alpha}{\varepsilon}\left[\frac{\varepsilon\,(a + bg + \gamma - e + G + X) + \delta\,(M - \beta)}{\varepsilon\,(1 - b + bt + \sigma) + \alpha\,\delta}\right] - \frac{M}{\varepsilon}$$

$$i = \frac{\beta\,[\,\varepsilon\,(1 - b + bt + \sigma) + \alpha\delta\,]}{\varepsilon\,[\,\varepsilon\,(1 - b + bt + \sigma) + \alpha\delta\,]} + \frac{\alpha\,[\,a + bg + \gamma - e + G + X]}{\varepsilon\,(1 - b + bt + \sigma) + \alpha\delta\,]} + \frac{\alpha\delta\,(M - \beta)}{\varepsilon\,[\varepsilon\,(1 - b + bt + \sigma) + \alpha\delta\,]} - \frac{M\,[\,\varepsilon\,(1 - b + bt + \sigma) + \alpha\delta\,]}{\varepsilon\,[\,\varepsilon\,(1 - b + bt + \sigma) + \alpha\delta\,]}$$

$$i = [\overline{\beta\varepsilon} - \overline{\beta\varepsilon b} + \beta\varepsilon\overline{b}t + \beta\overline{\varepsilon\sigma} + \beta\alpha\delta + \overline{\varepsilon\alpha}\,(a + bg + \gamma - e + G + X) + \alpha\delta M - \alpha\delta\beta - M\varepsilon + bM\varepsilon - b\varepsilon Mt - \sigma\varepsilon M - \alpha\delta M] \div \varepsilon\,[\varepsilon\,(1 - b + bt + \sigma) + \alpha\delta]$$

$$i = [\beta\varepsilon\,(1 - b + bt + \sigma) + \varepsilon\alpha\,(a + bg + \delta - e + G + X) - \varepsilon M\,(1 - b + bt + \sigma)] \div \varepsilon\,(1 - b + bt + \sigma) + \alpha\delta$$

$$i = \frac{\alpha\,(a + bg + \gamma - e + G + X) - (1 - b + bt + \sigma)\,(M - \beta)}{\varepsilon\,(1 - b + bt + \sigma) + \alpha\delta} \qquad \dots (28)$$

يمكن استخدام المعادلتين (27) ، (28) في توضيح أثر التغيّرات في المتغيّرات الاقتصادية المختلفة على الدخل وسعر الفائدة.

(١٢ ـ ٣ ـ ١) أثر تغيّر الميل الحدّي للاستهلاك

بأخذ التفاضل الجزئي للمعادلة (27) بالنسبة للمتغير b ، والذي يمثّل الميل الحدّي للاستهلاك، نحصل على:

$$\frac{\partial Y}{\partial b} = \frac{g\,\varepsilon\,[\varepsilon\,(1-b+bt+\sigma)+\alpha\delta]}{[\,\varepsilon\,(1-b+bt+\sigma)+\alpha\delta]^2} - \frac{\varepsilon\,(t-1)\,[\,\varepsilon\,(a+bg+\gamma-e+G+X)+\delta\,(M-\beta)]}{[\,\varepsilon\,(1-b+bt+\sigma)+\alpha\,\delta]^2}$$

$$= \frac{g\varepsilon}{\varepsilon\,(1-b+bt+\sigma)+\alpha\delta} + \frac{\varepsilon\,(1-t)\,Y}{\varepsilon(1-b+bt+\sigma)+\alpha\delta}$$

$$= \frac{\varepsilon\,(g-tY)+\varepsilon Y}{\varepsilon(\,1-b+bt+\sigma)+\alpha\delta}$$

وبالتعويض من المعادلة (5) في المعادلة الأخيرة نحصل على:

$$\frac{\partial Y}{\partial b} = \frac{\varepsilon\,(Y-T)}{\varepsilon\,(1-b+bt+\sigma)+\alpha\delta} > 0 \qquad \ldots (29)$$

وبأخذ التفاضل الجزئي للمعادلة (28) بالنسبة للمعامل b الذي يمثّل الميل الحدّي للاستهلاك نحصل على:

$$\frac{\partial i}{\partial b} = [\alpha g + (1-t)\,(M-\beta)\,]\,[\varepsilon\,(1-b+bt+\sigma)-\alpha\delta\,]$$

$$-[\,\alpha\,(a+bg+\gamma-e+G+X)$$

$$-(1-b+bt+\sigma)\,(M-\beta)]\,[\varepsilon\,(-1+t)]$$

$$\div\,[\,\varepsilon\,(1-b+bt+\sigma)+\alpha\delta\,]^2$$

$$= \frac{[\,\alpha g + (1-t)(M-\beta)\,][\,\varepsilon(1-b+bt+\sigma)+\alpha\delta\,]}{[\,\varepsilon(1-b+bt+\sigma)+\alpha\delta]^2}$$

$$- \frac{\varepsilon(t-1)[\alpha(a+bg+\gamma-e+G+X)-(1-b+bt+\sigma)(M-\beta)}{[\,\varepsilon(1-b+bt+\sigma)+\alpha\delta]^2}$$

$$\frac{\partial i}{\partial b} = \frac{\alpha g + (1-t)(M-\beta)}{\varepsilon(1-b+bt+\sigma)+\alpha\delta} + \frac{\varepsilon(1-t)i}{\varepsilon(1-b+bt+\sigma)+\alpha\delta}$$

$$\frac{\partial i}{\partial b} = \frac{\alpha g + (1-t)(M-\beta) + \varepsilon(1-t)i}{\varepsilon(1-b+bt+\sigma)+\alpha\delta}$$

$$= \frac{\alpha g + (1-t)(M-\beta+\varepsilon i)}{\varepsilon(1-b+bt+\sigma)+\alpha\delta}$$

وبالتعويض من المعادلة (21) في المعادلة الأخيرة نحصل على :

$$\frac{\partial i}{\partial b} = \frac{\alpha g + (1-t)\alpha Y}{\varepsilon(1-b+bt+\sigma)+\alpha\delta}$$

$$= \frac{\alpha g + \alpha Y - \alpha t Y}{\varepsilon(1-b+bt+\sigma)+\alpha\delta}$$

$$= \frac{\alpha Y - \alpha(tY-g)}{\varepsilon(1-b+bt+\sigma)+\alpha\delta}$$

$$= \frac{\alpha Y - \alpha T}{\varepsilon(1-b+bt+\sigma)+\alpha\delta}$$

$$\therefore \frac{\partial i}{\partial b} = \frac{\alpha(Y-T)}{\varepsilon(1-b+bt+\sigma)+\alpha\delta} > 0 \qquad \ldots (30)$$

وطبقًا للمعادلتين (29) ، (30) تؤدِّي زيادة الميل الحدِّي للاستهلاك إلى زيادة الدخل وارتفاع سعر الفائدة .

(١٢ ـ ٣ ـ ٢) أثر تغيّر الميل الحدّي للاستثمار

بأخـذ التفاضل الجزئي للمعادلة (27) بالنسبة للمتغيّر δ ، والذي يمثّل الميل الحدّي للاستثمار، نحصل على :

$$\frac{\partial Y}{\partial \delta} = \frac{(M-\beta)[\varepsilon(1-b+bt+\sigma)+\alpha\varepsilon]-\alpha\,[\varepsilon(a+bg+\gamma-e+G+X)+\delta(M-\beta)}{[\varepsilon\,(1-b+bt+\sigma)+\alpha\delta]^2}$$

$$= \frac{M-\beta}{\varepsilon\,(1-b+bt+\sigma)+\alpha\delta} - \frac{\alpha\,Y}{\varepsilon\,(1-b+bt+\sigma)+\alpha\delta}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \delta} = \frac{M-\beta-\alpha\,Y}{\varepsilon\,(1-b+bt+\sigma)+\alpha\delta}$$

وبالتعويض من المعادلة (22) في المعادلة نحصل على :

$$\frac{\partial Y}{\partial \delta} = \frac{-i\,\varepsilon}{\varepsilon\,(1-b+bt+\sigma)+\alpha\delta} < 0 \qquad \dots (31)$$

وبأخذ التفاضل الجزئي للمعادلة (28) نحصل على :

$$\frac{\partial i}{\partial \delta} = \frac{-\alpha\,[\alpha\,(a+bg+\gamma-e+G+X)-(1-b+bt+\sigma)\,(M-\beta)]}{[\varepsilon\,(1-b+bt+\sigma)+\alpha\delta]^2}$$

$$\frac{\partial i}{\partial \delta} = \frac{-\alpha\,i}{\varepsilon\,(1-b+bt+\sigma)+\alpha\delta} < 0 \qquad \dots (32)$$

وتوضّح المعادلتان (31) ، (32) أن زيادة درجة استجابة الاستثمار لسعر الفائدة سوف تؤدّي إلى نقص الدخل وسعر الفائدة بافتراض ثبات الاستثمار التلقائي .

(١٢ ـ ٣ ـ ٣) أثر تغيّر الطلب على النقود لدافع المعاملات

لتحديد أثر تغيّر الطلب على النقود لدافع المعاملات على الدخل نأخذ التفاضل الجزئي للمعادلة (27) بالنسبة للمتغيّر α فنحصل على :

$$\frac{\partial Y}{\partial \alpha} = \frac{-\delta\,[\varepsilon\,(a + bg + \gamma - e + G + X) + \delta(M - \beta)}{[\varepsilon\,(1 - b + bt + \sigma) + \alpha\delta]^2}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \alpha} = \frac{-\delta Y}{\varepsilon\,(1 - b + bt + \sigma) + \alpha\delta} < 0 \qquad \ldots (33)$$

وتوضِّح المعادلة رقم (33) أن زيادة الأرصدة النقدية لغرض المعاملات تؤدِّي إلى نقص الدخل القومي.

ولتوضيح أثر التغيّر في الطلب على النقود لدافع المعاملات على سعر الفائدة نأخذ التفاضل الجزئي للمعادلة (28) بالنسبة للمتغيّر α فنحصل على:

$$\begin{aligned}\frac{\partial i}{\partial \alpha} = \{&[\, a + bg + \gamma - e + G + X]\,[\varepsilon\,(1 - b + bt + \sigma) + \alpha\delta] \\ &- \delta[\,\alpha\,(a + bg + \gamma - e + G + X) \\ &- (1 - b + bt + \sigma)\,(M - b)]\} \\ &\div [\,\varepsilon\,(1 - b + bt + \sigma) + \alpha\delta]^2\end{aligned}$$

$$\frac{\partial i}{\partial \alpha} = \frac{\{[\, a + bg + \gamma - e + G + X]\,[\varepsilon\,(1 - b + bt + \sigma) + \alpha\delta]}{[\,\varepsilon\,(1 - b + bt + \sigma) + \alpha\delta]^2} - \frac{\delta\,[\alpha\,(a + bg + \gamma - 3 + G + X) - (1 - b + bt + \sigma)\,(M - \beta)]}{[\,\varepsilon\,(1 - b + bt + \sigma) + \alpha\delta]^2}$$

$$= \frac{a + bg + \gamma - e + G - X - \delta i}{\varepsilon\,(1 - b + bt + \sigma) + \alpha\delta}$$

وبالتعويض من المعادلة (8) في المعادلة الأخيرة نحصل على:

$$\frac{\partial i}{\partial \alpha} = \frac{Y\,(1 - b + bt + \sigma)}{\varepsilon\,(1 - b + bt + \sigma) + \alpha\delta} \qquad \ldots (34)$$

وتوضِّح المعادلة رقم (34) أن زيادة الميل للاحتفاظ بالنقود لدافع المعاملات سوف تؤدِّي إلى ارتفاع في سعر الفائدة.

(١٢ - ٣ - ٤) أثر تغيّر الطلب على النقود لدافع المضاربات

لتحديد أثر تغيّر الطلب على النقود لدافع المضاربات على كل من مستوى الدخل وسعر الفائدة نقوم بحساب $\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon}$ ، $\frac{\partial i}{\partial \varepsilon}$ فنحصل من المعادلة (27) على:

$$\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} = \frac{[a + bg + \gamma - e + G + X][\varepsilon(1 - b + bt + \sigma) + \alpha\delta]}{[\varepsilon(1 - b + bt + \sigma) + \alpha\delta]^2} - \frac{[1 - b + bt + \sigma][\varepsilon(a + bg + \gamma - e + G + X) + \delta(M - \beta)}{[\varepsilon(1 - b + bt + \sigma) + \alpha\delta]^2}$$

$$= \frac{a + bg + \gamma - e + G + X}{\varepsilon(1 - b + bt + \sigma) + \alpha\delta} - \frac{Y(1 - b + bt + \sigma)}{\varepsilon(1 - b + bt + \sigma) + \alpha\delta}$$

$$= \frac{(a + bg + \gamma - e + G + X) - Y(1 - b + bt + \sigma)}{\varepsilon(1 - b + bt + \sigma) + \alpha\delta}$$

وبالتعويض من المعادلة رقم (8) في المعادلة الأخيرة نحصل على:

$$\frac{\partial Y}{\partial \varepsilon} = \frac{\delta i}{\varepsilon(1 - \beta + \beta t + \sigma) + \alpha\delta} > 0 \qquad \ldots (35)$$

وتوضِّح المعادلة (35) أنه إذا زادت قيمة ε (أي قلَّ ميل الأفراد للاحتفاظ بالنقود لغرض المضاربات) فسوف ينتج عن ذلك زيادة في الدخل.

ويأخذ التفاضل الجزئي للمعادلة (28) بالنسبة للمتغيّر ε نحصل على:

$$\frac{\partial i}{\partial \varepsilon} = -(1 - b + bt + \sigma)[\alpha(a + bg + \gamma - e + G + X) - (1 - b + bt + \sigma)(M - \beta)] \div [\varepsilon(1 - b + bt + \sigma) + \alpha\delta]^2$$

وبالتعويض من المعادلة رقم (28) في هذه المعادلة الأخيرة نحصل على:

$$\frac{\partial i}{\partial \varepsilon} = \frac{-(1-b+bt+\sigma)i}{\varepsilon(1-b+bt+\sigma)+\alpha\delta} < 0 \qquad \ldots (36)$$

ويتضح من هذه المعادلة أنه إذا قلَّ ميل الأفراد للاحتفاظ بالنقود لغرض المضاربات فسوف ينتج عن ذلك انخفاض في سعر الفائدة.

(١٢ ـ ٣ ـ ٥) أثر تغيّرات كمية النقود المعروضة

لقد رأينا أن الزيادة في كمية النقود المعروضة تؤدِّي إلى انتقال في المنحنى LM إلى اليمين فتكون النتيجة زيادة في الدخل وانخفاضًا في سعر الفائدة، ويمكن إثبات ذلك بأخذ التفاضل الجزئي للمعادلتين (27) ، (28) بالنسبة للمتغيّر M الذي يمثِّل عرض النقود، فنحصل على:

$$\frac{\partial Y}{\partial M} = \frac{\delta}{\varepsilon(1-b+bt+\sigma)+\alpha\delta} > 0 \qquad \ldots (37)$$

$$\frac{\partial i}{\partial M} = \frac{-(1-b+bt+\sigma)}{\varepsilon(1-b+bt+\sigma)+\alpha\delta} < 0 \qquad \ldots (38)$$

فإذا زاد عرض النقود انخفض سعر الفائدة، ويؤدِّي انخفاض سعر الفائدة إلى تشجيع الاستثمار، وهذا يؤدِّي بدوره إلى زيادة الدخل.

(١٢ ـ ٣ ـ ٦) أثر تغيّرات السياسة المالية

تؤدِّي الزيادة في الإنفاق الحكومي أو النقصان في ضرائب الدخل إلى انتقال المنحنى IS إلى اليمين مما يؤدِّي إلى زيادة الدخل وارتفاع سعر الفائدة، ويحدث العكس لو نقص الإنفاق الحكومي، أو زادت الضرائب.

ويمكن تحديد أثر تغيّرات السياسة المالية على كل من الدخل وسعر الفائدة بأخذ التفاضل الجزئي للمعادلتين (27) ، (28) بالنسبة للمتغيّرات G ، t ، فنحصل على:

$$\frac{\partial Y}{\partial G} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon(1-b+bt+\sigma)+\alpha\delta} > 0 \qquad \ldots(39)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{-b\varepsilon[\varepsilon(a+bg+\gamma-e+G+X)+\delta(M-\beta)]}{[\varepsilon(1-b+bt+\sigma)+\alpha\delta]^2}$$

وبالتعويض من المعادلة (27) في هذه المعادلة الأخيرة نحصل على :

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = \frac{-b\,\varepsilon\,Y}{\varepsilon(1-b+bt+\sigma)+\alpha\delta} < 0 \qquad \ldots(40)$$

$$\frac{\partial i}{\partial G} = \frac{\alpha}{\varepsilon(1-b+bt+\sigma)+\alpha\delta} > 0 \qquad \ldots(41)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial i}{\partial t} = \Big\{&-b(M-\beta)[\varepsilon(1-b+bt+\sigma)+\alpha\delta] \\ &-\varepsilon b[\alpha(a+bg+bg+\gamma-e+G+X) \\ &-(1-b+bt+\sigma)(M-\beta)]\Big\} \\ &\div[\varepsilon(1-b+bt+\sigma)+\alpha\delta]^2\end{aligned}$$

وبالتعويض من المعادلة (28) نحصل على :

$$\begin{aligned}\frac{\partial i}{\partial t} &= \frac{-b(M-\beta)-\varepsilon\,bi}{\varepsilon(1-b+bt+\sigma)+\alpha\delta} \\ &= \frac{-bM+b\beta-\varepsilon bi}{\varepsilon(1-b+bt+\sigma)+\alpha\delta} \\ &= \frac{-b(M-\beta+\varepsilon\,i)}{\varepsilon(1-b+bt+\sigma)+\alpha\delta}\end{aligned}$$

وبالتعويض من المعادلة رقم (21) في المعادلة الأخيرة نحصل على :

$$\frac{\partial i}{\partial t} = \frac{-b\,\varepsilon\,Y}{\varepsilon(1-b+bt+\sigma)+\alpha\delta} < 0 \qquad \ldots(42)$$

وتوضِّح المعادلات (39) ، (40) ، (41) ، (42) أن زيادة الإنفاق الحكومي تؤدِّي إلى زيادة في كل من الدخل وسعر الفائدة، بينما تؤدِّي زيادة الضرائب إلى عكس هذه النتيجة، وهكذا تستطيع الحكومات أن تشجِّع النشاط الاقتصادي إما بزيادة الإنفاق الحكومي، أو بتخفيض معدّل الضريبة.

(١٢ ـ ٤) مضاعف الميزانية المتوازنة والتزاحم الإنفاقي

يؤدِّي إدخال سوق النقد في التحليل إلى تغيير ما وصلنا إليه من نتيجة بخصوص مضاعف الميزانية المتوازنة.

وقد سبق أن رأينا أن زيادة الإنفاق الحكومي المصحوبة بزيادة مماثلة في الضرائب سوف تؤدِّي إلى زيادة في الدخل تساوي زيادة الإنفاق الحكومي؛ أي أن مضاعف الميزانية المتوازنة يساوي واحدًا صحيحًا، إلا أن وجود سوق النقد سوف يقلِّل من قيمة مضاعف الميزانية المتوازنة بسبب «التزاحم الإنفاقي»، فزيادة الإنفاق الحكومي سوف تؤدِّي إلى زيادة الدخل، كما يتضح من المعادلة رقم (39) ، إلا أن هذه الزيادة في الدخل سوف تؤدِّي بدورها إلى زيادة في الطلب على النقود لدافع المضاربات، فإذا بقي عرض النقود ثابتًا فسوف يرتفع سعر الفائدة، مما يسبب نقصًا في الاستثمار الخاص. وهكذا فإن الزيادة في الإنفاق الحكومي سوف يقابلها نقص في الاستثمار الخاص، وتكون النتيجة أن مضاعف الميزانية المتوازنة سوف يقل عن واحد صحيح . ويمكن إثبات ذلك رياضيًّا فيما يلي:

نفترض أن:

$$dG = dT \qquad \dots (43)$$

وبأخذ التفاضل الكلِّي للمعادلة (5) نحصل على:

$$dT = tdY + Ydt \qquad \dots (44)$$

وبالتعويض من المعادلة (43) في المعادلة (44) نحصل على:

$$dt = \frac{dG - tdY}{Y} \qquad \dots (45)$$

وحيث إننا افترضنا تغيراً في كلٍّ من الإنفاق الحكومي والضرائب فإنه يمكن كتابة:

$$Y = \phi(G, t) \qquad \dots (46)$$

وبأخذ التفاضل الكلِّي لهذه المعادلة الأخيرة نحصل على:

$$dY = \frac{\partial Y}{\partial G} dG + \frac{\partial Y}{\partial t} dt \qquad \dots (47)$$

وبالتعويض من المعادلة (45) في المعادلة (47) نحصل على:

$$dY = \frac{\partial Y}{\partial G} dG + \frac{\partial Y}{\partial t} \left(\frac{dG - tdY}{Y} \right) \qquad \dots (48)$$

وبالتعويض من المعادلتين (39) ، (40) في المعادلة (48) نحصل على:

$$dY = \frac{\varepsilon dG}{\varepsilon(1 - b + bt + \sigma) + \alpha\delta} - \frac{b\varepsilon Y}{\varepsilon(1 - b + bt + \sigma) + \alpha\delta} \quad \frac{dG - tdY}{Y}$$

$$dY = \frac{\varepsilon dG - b\varepsilon(dG - tdY)}{\varepsilon(1 - b + bt + \sigma) + \alpha\delta} \qquad \dots (49)$$

ومن هذه المعادلة الأخيرة نحصل على:

$$\varepsilon dG - b\varepsilon dG + b\varepsilon t dY = dY\,[\varepsilon\,(1 - b + bt + \sigma) + \alpha\,\delta]$$

أو:

$$- b\varepsilon t dY + [\varepsilon (1 - b + bt + \sigma) + \alpha\delta] dY = \varepsilon dG (1 - b)$$

وبقسمة طرفيْ المعادلة الأخيرة على:

$$\varepsilon (1 - b + bt + \sigma) + \alpha\delta$$

نحصل على:

$$dY \left[1 - \frac{b\varepsilon t}{\varepsilon(1 - b + bt + \sigma) + \alpha\delta} \right] = \frac{\varepsilon(1 - b)\, dG}{\varepsilon(1 - b + bt + \sigma) + \alpha\delta)}$$

$$dY = \frac{\varepsilon(1 - b)\, dG}{[\varepsilon(1 - b + bt + \sigma) + \alpha\delta} \cdot \frac{[\varepsilon(1 - b + bt + \sigma) + \alpha\delta}{[\varepsilon(1 - b + bt + \sigma) + \alpha\delta] - b\varepsilon t}$$

$$dY = \frac{\varepsilon(1 - b)\, dG}{\varepsilon - \varepsilon b + \varepsilon bt + \varepsilon\sigma + \alpha\delta - \varepsilon bt} = \frac{\varepsilon(1 - b)\, dG}{\varepsilon(1 - b) + \varepsilon\sigma + \alpha\delta}$$

$$= \frac{dG}{1 + \dfrac{\sigma}{1-b} + \dfrac{\alpha\delta}{\varepsilon(1 - b)}}$$

$$\frac{dY}{dG} = \frac{1}{1 + \dfrac{1}{1-b}\left(\sigma + \dfrac{\alpha\delta}{\varepsilon}\right)} \quad \ldots (50)$$

وحيث إن:

$$\frac{1}{1 - b}\left(\sigma + \frac{\alpha\delta}{\varepsilon}\right) > 0$$

فإن مضاعف الميزانية المتوازنة في حالة التزاحم الإنفاقي يكون أقل من واحد صحيح، إذ تعطي المعادلة (50)

$$\frac{dY}{dG} < 1$$

فإذا رغبت الحكومة الإبقاء على وحدة مضاعف الميزانية المتوازنة في حالة التزاحم

الإنفاقي فإن عليها أن تزيد من كمية النقد المعروضة بمقدار يكفي لمنع سعر الفائدة من الارتفاع ؛ أي يجب أن تزداد الكمية المعروضة من النقود بحيث :

$$di = 0$$

ولإثبات ذلك رياضيًا نأخذ التفاضل الكلِّي للمعادلة (28) ، باعتبار أن M ، G ، t متغيّرات وبإهمال القطاع الخارجي نحصل على :

$$di = \{[\alpha dG - (1 - b + bt)\, dM - b\,(M - \beta)\, dt]\,[\varepsilon\,(1 - b + bt) + \alpha\delta] - \varepsilon\, bdt\,[\alpha\,(a + bg + \gamma - e + G) - (1 - b + bt)\,(M - \beta)]\} \div [\varepsilon\,(1 - b + bt) + \alpha\delta]^2$$

$$= \frac{\alpha dG - (1 - b + bt)\, dM}{\varepsilon(1 - b + bt) + \alpha\delta} - \frac{b(M - \beta)\, dt}{\varepsilon(1 - b + bt) + \alpha\delta} - \frac{\varepsilon bidt}{\varepsilon(1 - b + bt) + \alpha\delta}$$

$$= \frac{\alpha dG - (1 - b + bt)\, dM - (bM - \beta b + \varepsilon bi)dt}{\varepsilon(1 - b + bt) + \alpha\delta}$$

$$= \frac{\alpha dG - (1 - b + bt)\, dM - b(M - \beta + \varepsilon i)\, dt}{\varepsilon(1 - b + bt) + \alpha\delta}$$

وبالتعويض من المعادلة رقم (21) في المعادلة الأخيرة نحصل على :

$$di = \frac{\alpha dG - (1 - b + bt)\, dM - b\alpha Ydt}{\varepsilon(1 - b + bt) + \alpha\delta} \qquad \dots (51)$$

فإذا كانت $di = 0$ فإننا نحصل على :

$$\alpha dG - (1 - b + bt)\, dM - b\alpha Ydt = 0$$

أو:

$$\alpha dG - \alpha bYdt = (1 - b + bt)\, dM$$

ثم :

$$dM = \frac{\alpha dG - \alpha bYdt}{1 - b + bt} \qquad \dots (52)$$

وسوف نثبت الآن أنه إذا زاد عرض النقود بالمقدار المعطى في المعادلة (52) فإن وحدة مضاعف الميزانية المتوازنة سوف تتحقق.

فلو فاضلنا المعادلة (27) تفاضلاً كليًّا باعتبار أن dM ، dG ، dt متغيّرات فإننا نحصل على:

$$dY = \{ (\varepsilon dG + \delta dM)\,[\varepsilon\,(1 - b + bt) + \alpha\delta] - b\,\varepsilon\,[\varepsilon\,(a + bg + \gamma + G) + \delta\,(M - B)]\,dt \} \div [\varepsilon\,(1 - b + bt) + \alpha\delta]^2$$

$$dY = \frac{\varepsilon dG + \delta dM - b\varepsilon Y\,dt}{\varepsilon(1 - b + bt) + \alpha\delta} \qquad \dots (53)$$

وبالتعويض من المعادلتين (45) ، (52) في المعادلة (53) نحصل على:

$$dY = \frac{\varepsilon dG}{\varepsilon(1 - b + bt) + \alpha\delta} + \frac{\alpha\delta\,dY}{\varepsilon(1 - b + bt) + \alpha\delta} - \frac{b\varepsilon\,(dG - tdY)}{\varepsilon(1 - b + bt) + \alpha\delta} \qquad \dots (54)$$

$$\therefore dY = \frac{\varepsilon dG + \alpha\delta dY - b\varepsilon dG + \varepsilon btdY}{\varepsilon(1 - b + bt) + \alpha\delta}$$

ومن هذه المعادلة الأخيرة نحصل على:

$$\varepsilon\,(1 - b)\,dG = \{ [\varepsilon\,(1 - b + bt) + \alpha\delta] - \alpha\delta - b\varepsilon t \}\,dY$$

أو:

$$\varepsilon\,(1 - b)\,dG = \varepsilon\,(1 - b)\,dY$$

أو:

$$\frac{dY}{dG} = 1$$

وهكذا فإن وحدة مضاعف الميزانية المتوازنة تتحقق في حالة التزاحم الإنفاقي إذا زاد عرض النقود بمقدار يساوي :

$$dM = \frac{\alpha dG - \alpha bYdt}{1 - b + bt}$$

والذي حصلنا عليه من المعادلة رقم (52) ؛ إلا أن هذه النتيجة سوف تتغير إذا أدخلنا القطاع الخارجي في النموذج، وذلك لأن حجم المضاعف سوف ينخفض بسبب تسرب الواردات [Glahe, 1977 and Korliras, 1979].

(١٢ ـ ٥) تمرينـــات

١) تمثِّل المعلومات الآتية اقتصادًا ما :

الاستهلاك	١٠٠ مليون
الاستثمار	٤٠٠ مليون
الطلب على النقود لدافع المضاربات	١٤٠ مليون
الطلب على النقود لدافع المعاملات	٤٠ مليونًا
الميل الحدِّي للاستهلاك	٠,٥
الميل الحدِّي للاستثمار	- ٥٠٠
الميل الحدِّي للطلب على النقود بدافع المعاملات	٠,٢٠
الميل الحدِّي للطلب على النقود لدافع المضاربات	- ٢٠٠

فإذا قرَّرت الحكومة زيادة مستوى الدخل بمقدار ١٠٪ عن طريق زيادة عرض النقـود، احسب كمية النقود التي سوف تكتنز من هذه الزيادة علمًا بأن الكمية المعروضة حاليًا تساوي ٣٠٠ مليون.

٢) بافتراض العلاقات الآتية :

$$C = 40 + 0.8Yd$$

$$T = G = 20$$

$$I = 150 - 500i$$

$$M_t = 0.2Y$$

$$M_s = 146 - 400i$$

$$M = 250$$

فإذا كان التوظف الكامل يتحقق عند مستوى طلب كلِّي قدره $Y = 750$ ، احسب التغيّرات في الإنفاق الحكومي أو الضرائب اللازمة لتحقيق التوظف الكامل.

٣) افترض في اقتصاد ما العلاقات الآتية:

$$C = 60 + 0.6Y$$

$$I = 100 - 100i$$

$$M_t = 0.20Y$$

$$M_s = 30 - 60i$$

$$M = 99$$

(ا) استنتج معادلة كل من المنحنى IS والمنحنى LM ، واحسب سعر الفائدة والدخل عند التوازن.

(ب) بافتراض زيادة كل من الضرائب والإنفاق الحكومي بمقدار عشرة ملايين، احسب مقدار الزيادة في عرض النقود اللازمة لتحقيق وحدة مضاعف الميزانية المتوازنة.

٤) إذا كان الميل الحدِّي للاستهلاك يساوي ٠,٨ ، وكان معدّل ضريبة الدخل يساوي ٠,٢٥ ، فإذا زاد الدخل بمقدار ١٥٠ مليون نتيجة لزيادة الإنفاق الحكومي بمقدار ١٠٠ مليون، احسب النقص في الاستثمار الخاص نتيجة التزاحم الإنفاقي.

٥) افترض في اقتصاد ما العلاقات الآتية:

$$Y = C + I$$

$$C = a + bY$$

$$I = g - hi$$

$$M_d = Z - Xi + WY$$

$$M = M_d$$

أثبت أن زيادة ميل الأفراد للاحتفاظ بالنقود لدافع المعاملات سوف تؤدِّي ، إذا ما بقيت الأشياء الأخرى على ما هي عليه ، إلى انخفاض في الدخل .

٦) افترض في اقتصاد ما العلاقات الآتية :

$$C = 100 + 0.8Y_d$$

$$I = 150 - 600i$$

$$T = 0.25Y$$

$$G = 100$$

$$M_t = 0.2Y$$

$$M_s = 50 - 200i$$

$$M = 200$$

بافتراض زيادة الإنفاق الحكومي بمقدار ١٠٠ مليون ، احسب التغيّر في الدخل التوازني والاستثمار والميزانية .

٧) افترض في اقتصاد ما العلاقات الآتية :

$$C = 150 + 0.5Y$$

$$I = 200 - 400i$$

$$M_t = 0.25Y$$

$$M_s = 50 - 100i$$

$$M = 180$$

احسب أثر زيادة عرض النقود بمقدار ١٠ ملايين على كل من الدخل والاستثمار .

الفصل الثالث عشر

العرض الكلي والتوازن الكلي

(١٣ ـ ١) دالة العرض الكلِّي

يمثِّل العرض الكلِّي العلاقة بين الإنتاج الكلِّي (Q) والمستوى العام للأسعار (P). ويجب ملاحظة أن الدخل الكلِّي أو الإنفاق الكلِّي *المحقق* يساوي قيمة الناتج الكلِّي:

$$Y = PQ \qquad (1)$$

ويمكن التعبير عن دالة العرض الكلِّي بالعلاقة:

$$P = f(Q) \qquad (2)$$

وتتوقف صيغة دالة العرض على الطريقة التي يستجيب بها الإنتاج والأسعار لتغيّرات الطلب الكلِّي، فإذا افترضنا أن المستوى العام للأسعار لا يتأثر بتغيّرات الطلب الكلِّي قبل مستوى التوظف الكامل فإن دالة العرض تأخذ الصيغة:

$$P = H\,(Q - Q_F)^h \qquad (3)$$

حيث Q_F مستوى إنتاج التوظف الكامل.

أما إذا افترضنا أن تغيّرات الطلب الكلِّي سوف تؤدِّي إلى زيادة في كل من الإنتاج في المستوى العام للأسعار فإن دالة العرض الكلِّي يمكن كتابتها كالآتي:

$$P = H\,Q^{h-1}; h \geqslant 1 \qquad (4)$$

وتعطي المعادلة (4):

$$\frac{\partial P}{\partial Q} = (h-1)\,HQ^{h-2}$$

ويتّضح أنه إذا كانت $h > 1$ فإن :

$$\frac{\partial P}{\partial Q} > 0$$

وإذا كانت $h = 1$ فإن :

$$\frac{\partial P}{\partial Q} = 0$$

وهكذا فإن المعادلة (4) توضّح أن تغيّرات الطلب الكلّي قد تؤدّي إلى ارتفاع المستوى العام للأسعار أو تتركه على ما هو عليه [Phelps *et al*. 1970].

وبالتعويض من المعادلة (1) في المعادلة (4) نحصل على :

$$Y = H\,Q^{h-1}\,Q$$

$$Y = H\,Q^{h}$$

ومن هذه المعادلة الأخيرة نحصل على :

$$Q = \left(\frac{Y}{H}\right)^{\frac{1}{h}} \qquad \dots (5)$$

ويتّضح أن مرونة الدخل (Y) بالنسبة للإنتاج (Q) تساوي :

$$\frac{dY}{dQ} \cdot \frac{Q}{Y} = hHQ^{h-1} \cdot \frac{Q}{HQ^{h}} = h \qquad \dots (6)$$

أما مرونة المستوى العام للأسعار (P) بالنسبة للإنتاج (Q) فيمكن حسابها من المعادلة رقم (4) كالآتي :

$$\frac{dP}{dQ} \cdot \frac{Q}{P} = (h-1)\, HQ^{h-2} \cdot \frac{Q}{HQ^{h-1}} = h-1 \qquad \dots (7)$$

ويتّضح من هذه المعادلة الأخيرة أن الزيادة في الأسعار تكون كبيرة كلما كانت h كبيرة ؛ أي أن "h" تمثّل معامل التضخم .

وتتحدد قيمة Q طبقًا لدالة الإنتاج التي يتبعها الاقتصاد، فإذا افترضنا أنها من نوع كوب ـ دوجلاس (الذي درسناه في الفصل الثالث من هذا الكتاب)، وافترضنا أنها متجانسة من الدرجة الأولى فإننا نحصل على :

$$Q = L^{l} K^{k} \qquad \dots (8)$$

حيث L = كمية العمل

K = رصيد رأس المال

$0 < l < 1$

$0 < k < 1$

$l + k = 1$

وكما سبق أن رأينا في الفصل الثالث من هذا الكتاب تعطي هذه الدالة إنتاجية حدّية موجبة لكل عنصر، وتخضع هذه الإنتاجية لقانون تناقص الغلة .

فإذا افترضنا مؤقتًا ثبات رصيد رأس المال فإننا نحتاج إلى تحديد عرض العمل لتحقيق شروط التوازن العام، وتصبح المسألة تحديد كمية العمالة التي تعرض عند مستويات الأجور المختلفة، وسوف تتوقف هذه الكمية على ما إذا كانت العمالة تتغيّر استجابة للتغيّر في الأجر النقدي أو الأجر الحقيقي، أو ما إذا كان معدّل الأجر يميل نحو الجمود، فإذا افترضنا أن :

L_d = الطلب على العمل
L_s = عرض العمل
W = الأجر النقدي
$\frac{W}{P}$ = الأجر الحقيقي

فإننا نستطيع التمييز بين ثلاث حالات:

(١٣ ـ ١ ـ ١) تغيّر عرض العمل بالنسبة للأجر الحقيقي

في هذه الحالة يكون لدينا:

$$L_s = f\left(\frac{W}{P}\right)$$

ويمكن التعبير عن هذه الدالة بعلاقة خطّية كالآتي:

$$L_s = l_1 \cdot \frac{W}{P} \qquad \ldots (9)$$

ويتحقق التوازن في سوق العمل عندما يتساوى الطلب على العمل مع عرض العمل، وسوف نفترض أن المنشآت تستمر في طلب عمال حتى تتحقق المساواة بين الأجر الحقيقي والإنتاجية الحدِّية المادية أو:

$$MP_L = \frac{W}{P} \qquad \ldots (10)$$

حيث MP_L = الإنتاجية الحدِّية المادِّية

ومن المعادلة (8) نحصل على:

$$MP_L = \frac{\partial}{\partial L}(L^l K^k) = l\,L^{l-1} K^k = l\,L^{-k} K^k = l\left(\frac{K}{L}\right)^k \qquad \ldots (11)$$

عند التوازن نحصل على :

$$\frac{W}{P} = l\left(\frac{K}{L}\right)^{k} \qquad \dots (12)$$

وتعطي هذه المعادلة :

$$\left(\frac{W}{P}\right)^{\frac{1}{k}} = l^{\frac{1}{k}} \quad \frac{K}{L}$$

$$\therefore \ L_d = K\, l^{\frac{1}{k}} \left(\frac{W}{P}\right)^{-\frac{1}{k}} \qquad \dots (13)$$

ويتطلب التوازن في سوق العمل :

$$L_s = L_d$$

$$l_1 \frac{W}{P} = K\, l^{\frac{1}{k}} \left(\frac{W}{P}\right)^{-\frac{1}{k}} \qquad \dots (14)$$

ومن هذه المعادلة الأخيرة نحصل على :

$$\left(\frac{W}{P}\right)\left(\frac{W}{P}\right)^{\frac{1}{k}} = K\, l^{\frac{1}{k}} \ l_1^{-1}$$

$$\left(\frac{W}{P}\right)^{\frac{1}{k}+1} = K\, l^{\frac{1}{k}}\, l_1^{-1}$$

$$\left(\frac{W}{P}\right)^{\frac{1+k}{k}} = K\, l^{\frac{1}{k}}\, l_1^{-1}$$

$$\therefore \ \frac{W}{P} = \left(K^{k}\, l\, l_1^{-k}\right)^{\frac{1+k}{k}} \qquad \dots (15)$$

وتوضِّح المعادلة (15) أن تغيّرات الطلب الكلِّي لا تؤثِّر في معدّل الأجر الحقيقي ، كما أن هذه التغيرات لا تؤثِّر في مستوى الإنتاج التوازني كما يتضح من الآتي (حيث L_e مستوى التوظف التوازني) .

وبالتعويض من المعادلة (15) في المعادلة (9) نحصل على :

$$L_e = l_1 (K^k l l_1^{-k})^{\frac{1}{1+k}}$$

$$L_e = (K^k l l_1)^{\frac{1}{1+k}} \qquad \dots (16)$$

وبالتعويض من المعادلة (16) في المعادلة (8) نحصل على مستوى الإنتاج التوازني :

$$Q = [(K^k l l_1)^{\frac{1}{1+k}}]^l K^k$$

$$Q = (l l_1)^{\frac{l}{1+k}} K^{\frac{lk}{1+k}} K^k$$

$$= (l l_1)^{\frac{1}{1+k}} K^{\frac{lk+k(1+k)}{1+k}}$$

$$= (l l_1)^{\frac{1}{1+k}} K^{\frac{k(l+1+k)}{1+k}}$$

$$= (l l_1)^{\frac{1}{1+k}} K^{\frac{k(1-k+1+k)}{1+k}}$$

$$= (l l_1)^{\frac{1}{1+k}} K^{\frac{2k}{1+k}} \qquad \dots (17)$$

ويتَّضح أن مستوى الإنتاج التوازني لايتأثر بتغيّرات الطلب الكلِّي في حالة ما إذا كان عرض العمل يتوقَّف على الأجر الحقيقي .

(١٣ ـ ١ ـ ٢) تغيّر عرض العمل بالنسبة للأجر النقدي

في هذه الحالة يكون لدينا :

$$L_s = l_2 (W) \qquad \dots (18)$$

ولكن من معادلة الطلب على العمل (المعادلة رقم 13) :

$$L_d = K\, l^{\frac{1}{k}} \left(\frac{W}{P}\right)^{-\frac{1}{k}}$$

فنحصل عند التوازن على :

$$K\, l^{\frac{1}{k}} \left(\frac{W}{P}\right)^{-\frac{1}{k}} = l_2 W \qquad \dots (19)$$

ومن هذه المعادلة نحصل على :

$$W = K\, l^{\frac{1}{k}}\, W^{-\frac{1}{k}}\, P^{\frac{1}{k}}\, l_2^{-1}$$

$$W^{1+\frac{1}{k}} = K\, l^{\frac{1}{k}}\, P^{\frac{1}{k}}\, l_2^{-1}$$

$$\therefore\ W = (K\, l^{\frac{1}{k}}\, P^{\frac{1}{k}}\, l_2^{-1})^{\frac{k}{k+1}}$$

$$\therefore\ W = [lPK^k\, l_2^{-k}]^{\frac{1}{1+k}} \qquad \dots (20)$$

بأخذ تفاضل المعادلة (20) بالنسبة للمتغير P نحصل على :

$$\frac{\partial W}{\partial P} = \frac{1}{1+k}\left[\,lPK^{k}\, l_2^{-k}\,\right]^{\frac{-k}{1+k}} > 0 \qquad \ldots(21)$$

وتوضّح هذه المعادلة أن الأجر النقدي يزداد مع ارتفاع الأسعار، ولتحديد سلوك التغيّر في الأجر نحسب :

$$\frac{\partial^2 W}{\partial P^2} = \frac{-k}{(1+k)^2}\left[\,lPK^{k}\, l_2^{-k}\,\right]^{\frac{-1+2k}{1+k}} < 0 \qquad \ldots(22)$$

وتوضّح هذه المعادلة أن الأجر النقدي يزداد بمعدّل متناقص .

وبالتعويض من المعادلة (20) في المعادلة (18) نحصل على :

$$L_2 = l_2\left[\,lPK^{k}\, l_2^{-k}\,\right]^{\frac{1}{1+k}} = \left[\,l_2^{1+k}\, lPK^{k}\, l_2^{-k}\,\right]^{\frac{1}{1+k}} = \left[l_2 lP\,K^{k}\right]^{\frac{1}{1+k}} \qquad \ldots(23)$$

بتفاضل المعادلة (23) بالنسبة للمتغيّر P نحصل على :

$$\frac{\partial L_e}{\partial P} = \frac{1}{1+k}\left[l_2\, lPK^{k}\right]^{\frac{-k}{1+k}}\left[l_2 lK^{k}\right] \qquad \ldots(24)$$

$$\frac{\partial^2 L_e}{\partial P^2} = \frac{-k}{(1+k)^2}\, l_2\, lK^{k} \quad \left[l_2 lPK^{k}\right]^{\frac{-(1+2k)}{1+k}} < 0 \qquad \ldots(25)$$

وطبقًا للمعادلتين (24) ، (25) يزداد التوظف إذا ارتفع المستوى العام للأسعار، ولكن الزيادة تكون بمعدّل متناقص .

وبالتعويض من المعادلة (23) في دالة الإنتاج نحصل على :

$$Q = \{ l_2 \, lPK^k]^{1/1+k} \}^l K^k$$

$$= (l_2 lP)^{\frac{l}{1+k}} K^{\frac{lk}{1+k}} K^k$$

$$= (l_2 \, lP)^{\frac{lk}{1+k}} K^{\frac{lk+k(1+k)}{1+k}}$$

$$= K^{\frac{lk+k(1+k)}{1+k}} (l_2 \, lP)^{\frac{l}{1+k}}$$

$$= K^{\frac{k(1+1)}{1+k}} (ll_2 \, lP)^{\frac{l}{1+k}}$$

$$= K^{\frac{2k}{1+k}} (l_2 \, lP)^{\frac{l}{1+k}} \qquad \ldots (26)$$

وتعطي المعادلة (26) دالة الإنتاج عندما يكون عرض العمل دالة للأجر النقدي ، وبأخذ تفاضل المعادلة رقم (26) بالنسبة للمتغيّر P نحصل على :

$$\frac{\partial Q}{\partial P} = \frac{l}{1+k} (l_2 \, lP)^{\frac{l-1-k}{k}} K^{\frac{2k}{1+k}} \, ll_2$$

$$= \frac{l^2 l_2}{1+k} K^{\frac{2k}{1+k}} (l_2 lP)^{\frac{l-1-k}{1+k}} > 0 \qquad \ldots (27)$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial P^2} = \frac{l^2 l_2}{d1+k} K^{\frac{2k}{1+k}} \, l_2 l \, \frac{l-1-k}{1+k} (l_2 lP)^{\frac{l-2(1+k)}{1+k}}$$

$$= \frac{(l-1-k)}{(1+k)^2} l_2^2 \, l^3 \, (l_2 lP)^{\frac{l-2(1+k)}{1+k}} < 0 \qquad \ldots (28)$$

وتوضِّح المعادلتان (27) ، (28) أن ارتفاع المستوى العام للأسعار يؤدِّي إلى زيادة الإنتاج ولكن بمعدَّل متناقص.

(١٣ ـ ١ ـ ٣) حالة جمود معدّلات الأجور

في هذه الحالة لايكون هناك تأثير لعرض العمل على معدّل الأجر السائد ؛ أي أن :

$$W = W_0$$

ويصبح مستوى التوظف (أي المستوى الذي يحقِّق التساوي بين الطلب على العمالة وعرض العمالة) طبقًا للمعادلة (13) مساويًا :

$$\begin{aligned} L_e &= Kl^{1/k}\left(\frac{W_0}{P}\right)^{-\frac{1}{k}} \\ &= [Pl K^k W_0^{-1}]^{\frac{1}{k}} \qquad \dots (29) \end{aligned}$$

وتصبح دالة الإنتاج مساوية :

$$\begin{aligned} Q &= L^l K^k \\ &= [PlK^k W_0^{-1}]^{l/k}\ K^k \\ &= K^l [Pl W_0^{-1}]^{l/k} \\ &= K^{l+k} [Pl W_0^{-1}]^{l/k} \\ &= K [Pl W_0^{-1}]^{l/k} \qquad \dots (30) \end{aligned}$$

وبتفاضل المعادلتين (29) ، (30) بالنسبة للمتغير P نحصل على :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_e}{\partial P} &= \frac{1}{k}[PlK^k W_0^{-1}]^{\frac{1-k}{k}}\ lK^k W_0^{-1} \\ &= \frac{1}{kW_0} l K^k [PlK^k W_0^{-1}]^{\frac{1-k}{k}} \quad > \quad 0 \qquad \dots (31) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 L_e}{\partial P^2} = \frac{lK^k}{kW_0} \cdot \frac{1-k}{k} \frac{lK^k}{W_0} [PlK^k W_0^{-1}]^{\frac{1-2k}{k}}$$

$$= \frac{l^2K^{2k}}{k^2 W_0^2} (1-k) [PlK^k W_0^{-1}]^{\frac{1-2k}{k}} > 0 \qquad \ldots (32)$$

وتوضِّح المعادلتان (31) ، (32) أن ارتفاع المستوى العام للأسعار سوف يؤدِّي في هذه الحالة إلى زيادة التوظف بمعدّل متزايد .

$$\frac{\partial Q}{\partial P} = K \frac{l}{k} lW_0^{-1} [PlW_0^{-1}]^{\frac{l-k}{k}}$$

$$= \frac{l^2K}{W_0k} [Pl\, W_0^{-1}]^{\frac{l-k}{k}} > 0 \qquad \ldots (33)$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial P^2} = \frac{l^2K}{W_0k} \left(\frac{l-k}{k}\right) [P\, lW_0^{-1}]^{\frac{1-2k}{k}} \quad lW_0^{-1}$$

$$= \frac{l^3(l-k)K}{W_0^2\, k^2} [PlW_0^{-1}]^{\frac{1-2k}{k}} \qquad \ldots (34)$$

ويتَّضح من المعادلة رقم (33) أن ارتفاع المستوى العام للأسعار سوف يؤدِّي في هذه الحالة إلى زيادة الإنتاج . أما المعادلة (34) فتوضِّح أن الإنتاج سوف يزداد بمعدّل متزايد إذا كانت $l > k$ أي إذا كانت مرونة الإنتاج بالنسبة لتغيّرات عنصر العمل تفوق مرونته بالنسبة لتغيّرات رصيد رأس المال، وسوف يزداد الإنتاج بمعدّل متناقص إذا كانت $k > l$ ؛ أي إذا كانت مرونـة الإنتاج بالنسبة لتغيّرات رصيد رأس المال تفوق مرونته بالنسبة لعنصر العمل .

(١٣ ـ ٢) التوازن الكلِّي

يتحقق التوازن الكلِّي عندما يتحقق التوازن الآني في أسواق السلع والنقد والعمل، وبعبارة أخرى يتحقق التوازن الكلِّي عندما يتحقق التوازن بين الطلب الكلِّي (توازن سوقي السلع والنقد) والعرض الكلِّي. ويمكن تحديد التوازن الكلِّي بالتعويض في المعادلة رقم (1) ، والتي نعيد كتابتها هنا.

$$Y = PQ$$

وقد سبق أن حدَّدنا ثلاث قيم للإنتاج التوازني طبقًا للإفتراضات الثلاثة الخاصة بالعلاقة بين عرض العمل ومعدّل الأجر. وهكذا فإننا سوف نستخدم هذه النماذج الثلاثة في تحديد القيم التوازنية للمستوى العام للأسعار والتوظف والأجور، وكيف يتأثر كل منها بالتغيّر في المتغيّرات الاقتصادية المختلفة.

وسوف نستخدم في هذا التحليل مستوى الطلب الكلِّي التوازني الذي حصلنا عليه في الفصل السابق الذي تمثِّله المعادلة :

$$Y = \frac{\varepsilon\,(a + bg + \gamma - e + G + X) + \delta(M - \beta)}{\varepsilon\,(1 - b + bt + \sigma) + \alpha\delta} \qquad \ldots (35)$$

(١٣ ـ ٢ ـ ١) تغيّرات المستوى العام للأسعار

النموذج الأول. تغيّر عرض العمل بالنسبة للأجر الحقيقي

يكون مستوى الإنتاج التوازني في هذه الحالة مساويًا (طبقًا للمعادلة 17) :

$$Q = (l\,l_1)^{\frac{l}{1+k}} \quad K^{\frac{2k}{1+k}}$$

وبالتعويض من المعادلتين (17) ، (35) في المعادلة (1) نحصل على:

$$P = \frac{\varepsilon\,(a + bg + \gamma - e + G + X) + \delta(M - \beta)}{\varepsilon\,(1 - b + bt + \sigma) + \alpha\delta} \quad (l\,l_1)^{-l/1+k} \quad K^{\frac{-2k}{1+k}} \qquad \ldots (36)$$

لتحديد أثر تغيّر المتغيّرات المختلفة على المستوى العام للأسعار نأخذ معامل التفاضل الجزئي للمعادلة (36) بالنسبة للمتغيّرات المختلفة، فلو افترضنا أنّ:

$$S = (l\,l_1)^{\frac{-l}{1+k}} \; K^{\frac{-2k}{1+k}}$$

وافترضنا أن:

$$R = \varepsilon\,(1 - b + bt + \sigma) + \sigma\,\delta$$

فإننا نحصل على:

$$\frac{\partial P}{\partial a} = \frac{\varepsilon S}{R} > 0 \qquad \ldots (37)$$

$$\frac{\partial P}{\partial b} = \frac{\varepsilon S\,(Y - T)}{R} > 0 \qquad \ldots (38)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \gamma} = \frac{\varepsilon S}{R} > 0 \qquad \ldots (39)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \varepsilon} = \frac{\delta i S}{R} > 0 \qquad \ldots (40)$$

$$\frac{\partial P}{\partial g} = \frac{\varepsilon b S}{R} > 0 \qquad \ldots (41)$$

$$\frac{\partial P}{\partial M} = \frac{\delta S}{R} > 0 \qquad \ldots (42)$$

$$\frac{\partial P}{\partial G} = \frac{\varepsilon S}{R} > 0 \quad \ldots (43)$$

$$\frac{\partial P}{\partial X} = \frac{\varepsilon S}{R} > 0 \quad \ldots (44)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \delta} = \frac{-i\varepsilon S}{R} < 0 \quad \ldots (45)$$

$$\frac{\partial P}{\partial e} = \frac{-\varepsilon S}{R} < 0 \quad \ldots (46)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \alpha} = \frac{-\delta SY}{R} < 0 \quad \ldots (47)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \beta} = \frac{-\delta S}{R} < 0 \quad \ldots (48)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{-b\varepsilon YS}{R} < 0 \quad \ldots (49)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \sigma} = \frac{-\varepsilon YS}{R} < 0 \quad \ldots (50)$$

$$\frac{\partial P}{\partial l} = -\,Y\,S\,(1+k)\,(\ln l + 1) < 0 \quad \ldots (51)$$

$$\frac{\partial P}{\partial K} = \frac{-2k}{1+k}\,S\,Y\,K^{-(1+k)} < 0 \quad \ldots (52)$$

ويتَّضح من هذه المعادلات الأخيرة أن المستوى العام للأسعار سوف يزداد طبقًا لهذا النموذج، إذا حدثت زيادة في الاستهلاك التلقائي، أو الميل الحدِّي للاستهلاك، أو الاستثمار التلقائي، أو نقص في ميل الأفراد للاحتفاظ بالنقود لغرض المضاربات، أو زيادة في الإعانات، أو في كمية النقود المعروضة، أو في الإنفاق الحكومي أو الصادرات.

كما توضّح المعادلات أن المستوى العام للأسعار سوف يزداد طبقًا للنموذج الأول إذا حدثت زيادة في درجة استجابة الاستثمار لتغيّرات سعر الفائدة، أو في الاستيراد التلقائي، أو في ميل الأفراد للاحتفاظ بالنقود لغرض المعاملات، أو في الطلب التلقائي على النقود لغرض المضاربات، أو في معدّل ضريبة الدخل، أو في الميل الحدّي للاستيراد، أو في مرونة الإنتاج بالنسبة لعنصر العمل، أو في رصيد رأس المال.

النموذج ٢ . تغيّر عرض العمل بالنسبة للأجر النقدي

في هذه الحالة نحصل على المستوى التوازني للإنتاج من المعادلة رقم (26):

$$Q = K^{\frac{2k}{1+k}} \quad (l_2\, lP)^{\frac{l}{1+k}}$$

ونحصل من هذه المعادلة على:

$$PQ = K^{\frac{2k}{1+k}} \quad (l_2\, l)^{\frac{1}{1+k}} \quad P^{\frac{1+1+k}{1+k}}$$

$$Y = K^{\frac{2k}{1+k}} \quad (l_2 l)^{\frac{l}{1+k}} \quad P^{\frac{2}{1+k}}$$

$$P^{\frac{2k}{1+k}} = YK^{\frac{-2k}{1+k}} \quad (l_2 l)^{\frac{-l}{1+k}}$$

$$\therefore P = Y^{\frac{1+k}{2}} \quad K^{-k} \quad (l_2 l)^{\frac{-l}{2}} \qquad \ldots (53)$$

وبافتراض أن:

$$A = K^{-k}\, (l_2 l)^{-l/2}$$

وكذلك بافتراض أن :

$$R = \varepsilon (1 - b + bt + \sigma) + \sigma \delta$$

يمكننا تحديد أثر المتغيّرات المختلفة على المستوى العام للأسعار بأخذ معاملات التفاضل الجزئي للمعادلة (27) بالنسبة لهذه المتغيّرات، فنحصل على :

$$\frac{\partial P}{\partial a} = \frac{1+k}{2R} \varepsilon A\, Y^{\frac{k-1}{2}} > 0 \qquad \ldots (54)$$

$$\frac{\partial P}{\partial b} = \frac{1+k}{2R} \varepsilon A\, (Y - T) Y^{\frac{k-1}{2}} > 0 \qquad (55)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \gamma} = \frac{1+k}{2R} \varepsilon A\, Y^{\frac{k-1}{2}} > 0 \qquad (56)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \varepsilon} = \frac{1+k}{2R} \delta i A\, Y^{\frac{k-1}{2}} > 0 \qquad (57)$$

$$\frac{\partial P}{\partial g} = \frac{1+k}{2R} \varepsilon b A\, Y^{\frac{k-1}{2}} > 0 \qquad (58)$$

$$\frac{\partial P}{\partial M} = \frac{1+k}{2R} \delta A\, Y^{\frac{k-1}{2}} > 0 \qquad (59)$$

$$\frac{\partial P}{\partial G} = \frac{1+k}{2R} \varepsilon A\, Y^{\frac{k-1}{2}} > 0 \qquad (60)$$

$$\frac{\partial P}{\partial X} = \frac{1+k}{2R} \varepsilon A\, Y^{\frac{k-1}{2}} > 0 \qquad (61)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \delta} = \frac{-i\varepsilon}{2R} \quad \frac{1+k}{2} A\, Y^{k-1} < 0 \qquad (62)$$

$$\frac{\partial P}{\partial e} = \frac{-\varepsilon}{R} \quad \frac{1+k}{2} A\, Y^{k-1} < 0 \qquad (63)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \alpha} = \frac{-\delta}{R} \quad \frac{1+k}{2} A\, Y^{k} < 0 \qquad (64)$$

$$\frac{\partial P}{\partial \beta} = \frac{-\delta}{R} \quad \frac{1+k}{2} A\,Y^{k-1} < 0 \tag{65}$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{-b\varepsilon}{R} \quad \frac{1+k}{2} A\,Y^{(1+k)/2} < 0 \tag{66}$$

$$\frac{\partial P}{\partial \sigma} = \frac{-\varepsilon}{R} \cdot \frac{1+k}{2} AY^{k} < 0 \tag{67}$$

$$\frac{\partial P}{\partial l} = \frac{-lA}{2l_2} \; Y^{\frac{1+k}{2}} < 0 \tag{68}$$

$$\frac{\partial P}{\partial K} = -\frac{1}{2} (\ln l + 1)\, A\, Y^{\frac{1+k}{2}} < 0 \tag{69}$$

ويتّضح من هذه المعادلات أن المستوى العام للأسعار يتغيّر بالطريقة نفسها التي يتغيّر بها في النموذج الأول.

النموذج الثالث. جمود الأجور

في هذه الحالة، من المعادلة رقم (30) وهي :

$$Q = K\,[P\,l\,W_0^{-1}]^{l/k}$$

نحصل على :

$$Y = PQ = K\,(lW_0^{-1})^{l/k}\,P^{\frac{l+k}{k}}$$

أو:

$$P = Y^{k}\,K^{-k}\,W_0^{l}\,l^{-l} \qquad \dots (70)$$

ويمكن بسهولة إثبات أن المستوى العام للأسعار سوف يستجيب للمتغيّرات المختلفة بالطريقة نفسها التي توصلنا إليها في النموذج الثاني. هذا وتؤدّي الزيادة في W_0 إلى ارتفاع المستوى العام للأسعار، كما يتّضح من التفاضل الجزئي الآتي :

$$\frac{\partial P}{\partial W_0} = lW_0^{l-1} \quad Y^{k}\,K^{-k}\,l^{-l} > 0 \tag{71}$$

(١٣ ـ ٢ ـ ٢) تغيّرات مستوى الأجور

نموذج الأجر الحقيقي

طبقًا للمعادلة رقم (15) يتحدَّد الأجر الحقيقي بالمعادلة:

$$\frac{W}{P} = (K^k\, l\, l_1^{-k})^{\frac{1}{1+k}}$$

وتعطي هذه المعادلة:

$$W = P\,(K^k\, l\, l_1^{-k})^{\frac{1}{1+k}}$$

وبالتعويض من المعادلة رقم (36) في المعادلة رقم (16) نحصل على:

$$W = \frac{\varepsilon(a + bg + \gamma - e + G + X) + \delta\,(M - \beta)}{\varepsilon(1 - b + bt + \sigma) + \alpha\delta}\,(l\, l_1)^{-l/1+k} \,.\, K^{\frac{-2k}{1+k}} \quad (K^k\, l l_1^{-1}\, K^{-k})^{\frac{1}{1+k}}$$

$$W = \frac{\varepsilon(a + bg + \gamma - e + G + X) + \delta(M - \beta)}{\varepsilon(1 - b + bt + \sigma) + \alpha\delta}\,(l^k\, l_1^{-1}\, K^{-k})^{\frac{1}{1+k}} \qquad \ldots (72)$$

ولتحـديد أثر تغيّر المتغيّرات الاقتصادية المختلفة على مستوى الأجور نحسب معاملات التفاضل الجزئي للمعادلة (72) بالنسبة لهذه المتغيّرات، وبافتراض أن:

$$B = (l^k\, l_1^{-1}\, K^{-k})^{\frac{1}{1+k}} \,.$$

وأيضًا بافتراض أن:

$$R = (1 - b + bt + \sigma) + \alpha\,\delta$$

نحصل من معاملات التفاضل الجزئي على:

$$\frac{\partial W}{\partial a} = \frac{\varepsilon B}{R} > 0 \quad \dots (73)$$

$$\frac{\partial W}{\partial b} = \frac{\varepsilon B\,(Y - T)}{R} > 0 \quad \dots (74)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \gamma} = \frac{\varepsilon B}{R} > 0 \quad \dots (75)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \varepsilon} = \frac{\delta i B}{R} > 0 \quad \dots (76)$$

$$\frac{\partial W}{\partial g} = \frac{\varepsilon b B}{R} > 0 \quad \dots (77)$$

$$\frac{\partial W}{\partial M} = \frac{\delta B}{R} > 0 \quad \dots (78)$$

$$\frac{\partial W}{\partial G} = \frac{\varepsilon B}{R} > 0 \quad \dots (79)$$

$$\frac{\partial W}{\partial X} = \frac{\varepsilon B}{R} > 0 \quad \dots (80)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \delta} = \frac{-i\varepsilon B}{R} < 0 \quad \dots (81)$$

$$\frac{\partial W}{\partial e} = \frac{-\varepsilon B}{R} < 0 \quad \dots (82)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha} = \frac{-\delta B Y}{R} < 0 \quad \dots (83)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \beta} = \frac{-\delta B}{R} < 0 \quad \dots (84)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{-b\varepsilon Y B}{R} < 0 \quad \dots (85)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \sigma} = \frac{-\varepsilon YB}{R} < 0 \qquad \dots (86)$$

$$\frac{\partial W}{\partial l} = \frac{k}{1+k} \cdot \frac{YB}{l} > 0 \qquad \dots (87)$$

$$\frac{\partial W}{\partial K} = \frac{-k}{1+k} \quad \frac{YB}{K} < 0 \qquad \dots (88)$$

ويتّضح أن مستوى الأجور يستجيب للمتغيّرات الاقتصادية طبقًا لهذا النموذج بالطريقة نفسها التي استجاب بها المستوى العام للأسعار، والاستثناء الوحيد هو مرونة الإنتاج بالنسبة للعمالة، والتي يمثّلها المعامل (l) ، فبينما كان أثر هذا المعامل سالبًا في حالة المستوى العام للأسعار (المعادلة رقم 51) أصبح هذا الأثر موجبًا في حالة مستوى الأجور (المعادلة رقم 87) .

نموذج الأجر النقدي

طبقًا للمعادلة رقم (20) يتحدَّد الأجر في هذا النموذج طبقًا للمعادلة :

$$W = [l\,P\,K^k\,l_2^{-k}]^{\frac{1}{1+k}}$$

وبالتعويض من المعادلة رقم (53) في المعادلة (20) نحصل على :

$$W = [l\,Y^{\frac{1+k}{2}}\;K^{-k}\,(l_2 l)^{-l/2}\,K^k\,l_2^{-k}]^{\frac{1}{1+k}}$$

$$= \left(\frac{l}{l_2}\right)^{1/2}\;Y^{1/2} \qquad \dots (89)$$

$$W = \left[\frac{l}{l_2} \cdot \frac{\varepsilon(a + bg + \gamma - e + G + X) + \delta\,(M - \beta)}{\varepsilon(1 - b + bt + \sigma) + \alpha\delta}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad \dots (90)$$

وبأخذ التفاضل الجزئي للمعادلة (90) نحصل على :

$$\frac{\partial W}{\partial a} = \frac{\varepsilon}{2R} (l/l_2\ Y)^{1/2} > 0 \qquad \ldots (91)$$

$$\frac{\partial W}{\partial b} = \frac{\varepsilon}{2R} (Y - T)\ (l/l_2\ Y)^{1/2} > 0 \qquad \ldots (92)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \gamma} = \frac{\varepsilon}{2R} (l/l_2\ Y)^{1/2} > 0 \qquad \ldots (93)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \varepsilon} = \frac{\delta i}{2R} (l/l_2\ Y)^{1/2} > 0 \qquad \ldots (94)$$

$$\frac{\partial W}{\partial g} = \frac{\varepsilon b}{2R} (l/l_2\ Y)^{1/2} > 0 \qquad \ldots (95)$$

$$\frac{\partial W}{\partial M} = \frac{\delta}{2R} (l/l_2\ Y)^{1/2} > 0 \qquad \ldots (96)$$

$$\frac{\partial W}{\partial G} = \frac{\varepsilon}{2R} (l/l_2\ Y)^{1/2} > 0 \qquad \ldots (97)$$

$$\frac{\partial W}{\partial X} = \frac{\varepsilon}{2R} (l/l_2\ Y)^{1/2} > 0 \qquad \ldots (98)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \delta} = \frac{-i\varepsilon}{2R} (l/l_2\ Y)^{1/2} < 0 \qquad \ldots (99)$$

$$\frac{\partial W}{\partial e} = \frac{-\varepsilon}{2R} (l/l_2\ Y)^{1/2} < 0 \qquad \ldots (100)$$

$$\frac{\partial W}{\quad} = \frac{-\delta}{\quad} (l/l_2\ Y)^{1/2} < 0 \qquad \ldots (101)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \beta} = \frac{-\delta}{2R} (l/l_2\ Y)^{1/2} < 0 \qquad \ldots (102)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{-b\varepsilon}{2R} (lY/l_2)^{1/2} < 0 \quad \dots (103)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \sigma} = \frac{-\varepsilon}{2R} (lY/l_2)^{1/2} < 0 \quad \dots (104)$$

$$\frac{\partial W}{\partial l} = \frac{1}{2} (Y/ll_2)^{1/2} > 0 \quad \dots (105)$$

$$\frac{\partial W}{\partial K} = 0 \quad \dots (106)$$

ويتّضح من هذه المعادلات أن مستوى الأجور يستجيب للمتغيّرات الاقتصادية المختلفة طبقًا لهذا النموذج بطريقة تشبه تمامًا استجابته طبقًا للنموذج السابق، والاستثناء الوحيد هو تأثير رصيد رأس المال، حيث يختفي هذا المتغيّر تمامًا في هذا النموذج .

نموذج الأجر الجامد (أو المحدد)

وحيث إن الأجر يتّصف بالجمود أو:

$$W = W_0$$

فلن يكون لتغيّر معاملات أو متغيّرات الطلب الكلّي أي تأثير على مستوى الأجور طبقًا لهذا النموذج .

(١٣ ـ ٢ ـ ٣) تغيّرات مستوى التوظّف

نحاول الآن أن نُحَدِّد اتجاهات التغيّر في مستوى التوظّف التوازني مع التغيّر في المتغيّرات الاقتصادية المختلفة طبقًا لكل نموذج .

نموذج الأجر الحقيقي

طبقًا للمعادلة (16) يتحدَّد مستوى التوظف التوازني كالآتي :

$$L_e = (K^k\, l\, l_1)^{\frac{1}{1+k}}$$

ويتّضح أن مستوى التوظف، طبقًا لهذا النموذج لايتأثّر بتغيّرات الطلب الكلّي.

وبأخذ التفاضل الجزئي للمعادلة (16) بالنسبة للمتغيّرات K ، l نحصل على:

$$\frac{\partial L_e}{\partial K} = \frac{k}{1+k}(K^{-1}\, l l_1)^{\frac{1}{1+k}} \quad > 0 \qquad \ldots (107)$$

$$\frac{\partial L_e}{\partial l} = \frac{1}{1+k}(l^{-k}\, K^k\, l_1)^{\frac{1}{1+k}} \quad > 0 \qquad \ldots (108)$$

ويتّضح أن مستوى التوظف يتغيّر في الاتجاه نفسه كرصيد رأس المال ومرونة الإنتاج بالنسبة لعنصر العمل.

نموذج الأجر النقدي

طبقًا للمعادلة (23) يتحدَّد مستوى التوظف كالآتي:

$$L_e = [l_2\, l P\, K^k]^{\frac{1}{1+k}}$$

وبالتعويض من المعادلة رقم (53) في المعادلة السابقة نحصل على:

$$L_e = (l_2\, l K^k)^{\frac{1}{1+k}} \;\; [Y^{\frac{1}{1+k}} \;\; K^{-k}\, l_2^{-l/2}\, l^{-l/2}\,]^{\frac{1}{1+k}} = (l l_2\, Y)^{1/2}$$

$$L_e = \Big[l l_2 \frac{\varepsilon(a + bg + \gamma - e + G + X) + \delta(M - \beta)}{\varepsilon(1 - b + bt + \sigma) + \alpha\delta}\Big]^{\frac{1}{2}} \qquad \ldots (109)$$

بأخذ التفاضل الجزئي للمعادلة الأخيرة بالنسبة للمتغيّرات المختلفة نحصل على :

$$\frac{\partial L_e}{\partial a} = \frac{\varepsilon}{2R} (ll_2/Y)^{1/2} \quad > 0 \qquad \dots (110)$$

$$\frac{\partial L_e}{\partial b} = \frac{\varepsilon}{2R} (Y - T) (ll_2/Y)^{1/2} > 0 \qquad \dots (111)$$

$$\frac{\partial L_e}{\partial \gamma} = \frac{\varepsilon}{2R} (ll_2/Y)^{1/2} \quad > 0 \qquad \dots (112)$$

$$\frac{\partial L_e}{\partial \varepsilon} = \frac{\delta i}{2R} (ll_2/Y)^{1/2} \quad > 0 \qquad \dots (113)$$

$$\frac{\partial L_e}{\partial g} = \frac{\varepsilon b}{2R} (ll_2/Y)^{1/2} \quad > 0 \qquad \dots (114)$$

$$\frac{\partial L_e}{\partial M} = \frac{\delta}{2R} (ll_2/Y)^{1/2} \quad > 0 \qquad \dots (115)$$

$$\frac{\partial L_e}{\partial G} = \frac{\varepsilon}{2R} (ll_2/Y)^{1/2} \quad > 0 \qquad \dots (116)$$

$$\frac{\partial L_e}{\partial X} = \frac{\varepsilon}{2R} (ll_2/Y)^{1/2} \quad > 0 \qquad \dots (117)$$

$$\frac{\partial L_e}{\partial \delta} = \frac{-i\varepsilon}{2R} (ll_2/Y)^{1/2} \quad < 0 \qquad \dots (118)$$

$$\frac{\partial L_e}{\partial e} = \frac{-\varepsilon}{2R} (ll_2/Y)^{1/2} \quad < 0 \qquad \dots (119)$$

$$\frac{\partial L_e}{\partial \alpha} = \frac{-\delta}{2R} (ll_2\ Y)^{1/2} \quad < 0 \qquad \dots (120)$$

$$\frac{\partial L_e}{\partial \beta} = \frac{-\delta}{2R} (ll_2/Y)^{1/2} \quad < 0 \qquad \dots (121)$$

$$\frac{\partial L_e}{\partial t} = \frac{-b\varepsilon}{2R}(ll_2\, Y)^{1/2} \quad < \ 0 \qquad \dots (122)$$

$$\frac{\partial L_e}{\partial \sigma} = \frac{-\varepsilon}{2R}(ll_2\, Y)^{1/2} \quad < \ 0 \qquad \dots (123)$$

$$\frac{\partial L_e}{\partial l} = \frac{1}{2}(l_2 Y/l)^{1/2} \quad > \ 0 \qquad \dots (124)$$

$$\frac{\partial L_e}{\partial K} = 0 \qquad \dots (125)$$

ويتّضح من المعادلات السابقة أن مستوى التوظف طبقًا للنموذج الثاني يتغيّر في الاتجاه نفسه مع المتغيّرات a ، b ، γ ، ε ، g ، M ، G ، X ، ويتغيّر في اتجاه مخالف للتغيّر في المتغيّرات δ ، e ، α ، β ، t ، σ ، كما أن مستوى التوظف يزداد مع الزيادة في مرونة الإنتاج بالنسبة للعمالة، ويتّضح أيضًا أن رصيد رأس المال لايؤثّر في مستوى التوظّف التوازني طبقًا لهذا النموذج.

نموذج الأجر الجامد

يتحدَّد مستوى التوظف التوازني طبقًا لهذا النموذج بالمعادلة رقم (29) وهي

$$L_e = [P/K^k\, W_0^{-1}\,]^{1/k}$$

وبالتعويض من المعادلة رقم (70) في المعادلة رقم (29) نحصل على:

$$L_e = [Y^k\, K^{-k}\, W_0^{l}\, l^{-l}\, /K^k\, W_0^{-1}\,]^{1/k} = \frac{l}{W_0}\ Y$$

$$L_e = \frac{l}{W_0}\left[\frac{\varepsilon(a + bg + \gamma - e\,G + X) + \delta(M - \beta)}{\varepsilon(1 - b + bt + \sigma) + \alpha\delta}\right] \qquad \ldots(126)$$

ويمكن تحديد اتجـاهـات التغـيّر في مستوى التوظف التوازني بأخذ التفاضل الجزئي للمعادلة (126) بالنسبة للمتغيّرات المختلفة فنحصل على:

$$\frac{\partial L_e}{\partial a} = \frac{\varepsilon}{R}\frac{l}{W_0} > 0 \qquad \ldots(127)$$

$$\frac{\partial L_e}{\partial b} = \frac{\varepsilon}{R}(Y - T)\frac{l}{W_0} > 0 \qquad \ldots(128)$$

$$\frac{\partial L_e}{\partial \gamma} = \frac{\varepsilon}{R}\frac{l}{W_0} > 0 \qquad \ldots(129)$$

$$\frac{\partial L_e}{\partial \varepsilon} = \frac{\delta i}{R}\frac{l}{W_0} > 0 \qquad \ldots(130)$$

$$\frac{\partial L_e}{\partial g} = \frac{\varepsilon b}{R}\frac{l}{W_0} > 0 \qquad \ldots(131)$$

$$\frac{\partial L_e}{\partial M} = \frac{\delta}{R}\frac{l}{W_0} > 0 \qquad \ldots(132)$$

$$\frac{\partial L_e}{\partial G} = \frac{\varepsilon}{R}\frac{l}{W_0} > 0 \qquad \ldots(133)$$

$$\frac{\partial L_e}{\partial X} = \frac{\varepsilon}{R}\frac{l}{W_0} > 0 \qquad \ldots(134)$$

$$\frac{\partial L_e}{\partial \delta} = \frac{-i\varepsilon}{R}\;\frac{l}{W_0} < 0 \qquad \ldots(135)$$

$$\frac{\partial L_e}{\partial e} = \frac{-\varepsilon}{R}\;\frac{l}{W_0} < 0 \qquad \ldots(136)$$

$$\frac{\partial L_e}{\partial \alpha} = \frac{-\delta}{R} \frac{lY}{W_0} < 0 \qquad \dots (137)$$

$$\frac{\partial L_e}{\partial \beta} = \frac{-\delta}{R} \frac{l}{W_0} < 0 \qquad \dots (138)$$

$$\frac{\partial L_e}{\partial t} = \frac{-b\varepsilon Y}{R} \frac{l}{W_0} < 0 \qquad \dots (139)$$

$$\frac{\partial L_e}{\partial \sigma} = \frac{-\varepsilon Y}{R} \frac{l}{W_0} < 0 \qquad \dots (140)$$

$$\frac{\partial L_e}{\partial l} = \frac{Y}{W_0} > 0 \qquad \dots (141)$$

$$\frac{\partial L_e}{\partial K} = 0 \qquad \dots (142)$$

ويتّضح من هذه المعادلات أنه طبقًا للنموذج الثالث يزداد مستوى التوظف إذا زاد الاستهلاك التلقائي، أو الميل الحدِّي للاستهلاك أو الاستثمار التلقائي، أو إذا حدث نقص في ميل الأفراد للاحتفاظ بالنقود لغرض المضاربات، أو زادت الإعانات، أو كمية النقود المعروضة، أو إذا حدثت زيادة في الإنفاق الحكومي أو الصادرات.

وينخفض مستوى التوظف التوازني إذا حدثت زيادة في درجة استجابة الاستثمار لتغيّرات سعر الفائدة، أو حدثت زيادة في الاستيراد التلقائي، أو في الميل الحدِّي للاستيراد، أو في ميل الأفراد للاحتفاظ بالنقود لغرض المعاملات، أو حدثت زيادة في الطلب التلقائي على النقود، أو في معدّل ضريبة الدخل.

كما يوضِّح هذا النموذج أن مستوى التوظف يزداد إذا زادت مرونة الإنتاج بالنسبة للعمالة، ولكن طبقًا لهذا النموذج لا يؤثِّر رصيد رأس المال في مستوى التوظف التوازني.

(١٣ - ٣) تمرينـات

١) افترض دالة الإنتاج :

$$Q = L^{\alpha} K^{1-\alpha}$$

ودالة العرض الكلّي

$$Q_s = \sqrt{P}$$

(أ) اشتق منحنى الطلب على العمل إذا كانت المنشآت تسعى وراء تحقيق أقصى ربح ممكن.

(ب) احسب أثر تغيّر الإنفاق الكلّي بمقدار واحد بالمائة على المستوى العام للأسعار ومستوى التوظف الكامل.

٢) استخدم دالة الإنتاج الآتية :

$$Q = L^{0.75} K^{0.25}$$

في اشتقاق منحنى الطلب على العمل إذا كان هذا الطلب دالة للأجر الحقيقي $(\frac{W}{P})$

٣) بافتراض دالة الإنتاج في (٢) أعلاه، وبافتراض أن $K = 32$ ، وأن عرض العمل

$$L_S = \left(1\frac{1}{3}\right) \quad \left(\frac{W}{P}\right)$$

احسب مستوى التوظف التوازني ثم احسب مرونة التوظف بالنسبة لكل من الإنفاق الكلّي والتغيّر في رصيد رأس المال.

٤) احسب مستوى التوظف التوازني إذا كانت دالة الإنتاج تساوي

$$Q = 10\,L^{\frac{1}{2}}$$

وكانت دالة عرض العمل تساوي :

$$L_s = 10W \qquad \text{(i)}$$

$$L_s = 10\,(\frac{W}{P}) \qquad \text{(ii)}$$

احسب مرونة مستوى التوظف والمستوى العام للأسعار بالنسبة للإنفاق الكلي في كل حالة .

الفصل الرابع عشر

التوازن الكلي
والسياسات الاقتصادية

(١٤ ـ ١) أثر تغيّرات السياسات المالية والنقدية على الإنتاج والتوظف والأجور والأسعار

يختلف أثـر تغـيّرات السياسات المالية والنقدية (والتي تشمل تغيّرات الإنفاق الحكومي ومعدّل ضريبة الدخل وعرض النقود) على الإنتاج والتوظف والأجور والأسعار تبعًـا لنموذج عرض العمل الذي يسلكه الاقتصاد؛ ومن ثم سوف نتناول حساب مرونة هذه المتغيّرات بالنسبة لأدوات السياسات المالية والنقدية طبقًا لكل نموذج.

(١٤ ـ ١ ـ ١) نموذج الأجر الحقيقي

توصّلنا في الفصل السابق إلى العلاقات الآتية طبقًا لهذا النموذج:

$$Q = (ll_1)^{\frac{l}{1+k}} \quad K^{\frac{2k}{1+k}} \qquad \dots (1)$$

$$L_e = (K^k\, ll_1)^{\frac{1}{1+k}} \qquad \dots (2)$$

$$W = \frac{\varepsilon(a + bg + \gamma - e + G - X) + \delta(M - \beta)}{\varepsilon(1 - b + bt + \sigma) + \alpha\delta} (l^k l_1^{-1}\, K^{-k})^{\frac{1}{1+k}} \qquad \dots (3)$$

$$P = \frac{\varepsilon(a + bg + \gamma - e + G + X) + \delta(M - \beta)}{\varepsilon(1 - b + bt + \sigma) + \alpha\delta} (ll_1)^{-ll1+k} \quad K^{\frac{-2k}{1+k}} \qquad \dots (4)$$

وبافتراض أن :

$$R = \varepsilon(1 - b + bt + \sigma) + \alpha\delta$$

وبـأخـذ مرونـات المتغيّرات الأربعة بالنسبة للإنفاق الحكومي (G) ، ولمعدّل الضريبة (t) ، ولعرض النقود (M) ، نحصل على :

$$\eta_{QG} = \frac{\partial Q}{\partial G} \quad \frac{G}{Q} \ = \ 0 \qquad \dots (5)$$

$$\eta_{Qt} = \frac{\partial Q}{\partial t} \quad \frac{t}{Q} \ = \ 0 \qquad \dots (6)$$

$$\eta_{QM} = \frac{\partial Q}{\partial M} \quad \frac{M}{Q} \ = \ 0 \qquad \dots (7)$$

ويتَّضح أن مستوى الإنتاج التوازني لا يتأثَّر بتغيّرات السياسات المالية والنقدية طبقًا للنموذج الأول.

$$\eta_{L_eG} = \frac{\partial L_e}{\partial G} \quad \frac{G}{L_e} \ = \ 0 \qquad \dots (8)$$

$$\eta_{L_et} = \frac{\partial L_e}{\partial t} \quad \frac{t}{L_e} \ = \ 0 \qquad \dots (9)$$

$$\eta_{L_eM} = \frac{\partial L_e}{\partial M} \quad \frac{M}{L_e} \ = \ 0 \qquad \dots (10)$$

وكما هو موضَّح فإن مستوى التوظف التوازني لا يتأثَّر بتغيّرات السياسات المالية النقدية إذا كان عرض العمل دالة للأجر الحقيقي .

$$\eta_{WG} = \frac{\partial W}{\partial G} \quad \frac{G}{W} = \frac{\varepsilon G}{RY} \qquad \dots (11)$$

$$\eta_{Wt} = \frac{\partial W}{\partial t} \; \frac{t}{W} = \frac{-\varepsilon bt}{R} \qquad \dots (12)$$

$$\eta_{WM} = \frac{\partial W}{\partial M} \; \frac{M}{W} = \frac{\delta M}{RY} \qquad \dots (13)$$

ويتّضح ممّا سبق أن زيادة الإنفاق الحكومي بمقدار واحد بالمائة سوف يؤدّي إلى زيادة الأجر بمقدار $\frac{\varepsilon G}{RY}$ بالمائة، بينما يؤدّي زيادة معدّل ضريبة الدخل بمقدار واحد بالمائة إلى نقص الأجر بمقدار $\frac{\varepsilon bt}{R}$ بالمائة، كما يؤدّي زيادة عرض النقود بمقدار واحد بالمائة إلى زيادة الأجر بمقدار $\frac{\delta M}{RY}$ بالمائة.

كما يمكن إيجاد مرونة المستوى العام للأسعار بالنسبة لتغيّرات السياسات المالية والنقدية كالآتي:

$$\eta_{PG} = \frac{\partial P}{\partial G} \; \frac{G}{P} = \frac{\varepsilon G}{RY} \qquad \dots (14)$$

$$\eta_{Pt} = \frac{\partial P}{\partial t} \; \frac{t}{P} = \frac{-b\varepsilon t}{R} \qquad \dots (15)$$

$$\eta_{PM} = \frac{\partial P}{\partial M} \; \frac{M}{P} = \frac{\delta M}{RY} \qquad \dots (16)$$

وتوضّح المعادلة (14) أن زيادة الإنفاق الحكومي بمقدار واحد بالمائة سوف تؤدّي إلى ارتفاع في المستوى العام للأسعار بمقدار $\frac{\varepsilon G}{RY}$ بالمائة. أما المعادلة (15) فتوضّح أن ارتفاع معدّل ضريبة الدخل بمقدار واحد بالمائة من شأنه أن يؤدّي إلى نقص المستوى العام للأسعار بمقدار $\frac{b\varepsilon t}{R}$ بالمائة، وتوضّح المعادلة (16) أن زيادة

عرض النقـود بمقـدار واحد بالمائة تؤدِّي إلى ارتفاع المستوى العام للأسعار بمقدار $\frac{\delta M}{RY}$ بالمـائـة [Gordon, 1978] ويتَّضـح أن مرونة الأجور تماثل تمامًا مرونة الأسعار طبقًا لهذا النموذج.

(١٤ ـ ١ ـ ٢) نموذج الأجر النقدي

توصلنا في الفصل السابق إلى العلاقات الآتية طبقًا لهذا النموذج:

$$Q = K^{\frac{2k}{1+k}} \; (l_2 l P)^{\frac{l}{1+k}}$$

$$= K^{\frac{2k}{1+k}} \; (l_2 l)^{\frac{l}{1+k}} \; P^{\frac{l}{1+k}} \qquad \dots (17)$$

وحيث إن المستوى العام للأسعار P يتحدَّد طبقًا لهذا النموذج بالمعادلة الآتية (وهي المعادلة رقم 53 في الفصل السابق).

$$P = Y^{\frac{1+k}{2}} \; K^{-k} \, (l_2 l)^{\frac{-l}{2}} \qquad \dots (18)$$

وبالتعويض من المعادلة (18) في المعادلة (17) نحصل على:

$$Q = Y^{(1-k)/2} \; K^{\frac{k(2-l)}{1+k}} \; (l_2 l)^{\,l(2-l)/2\,(1+k)} \qquad \dots (19)$$

ويمكن كتابة هذه المعادلة الأخيرة كالآتي:

$$Q = \left[\frac{\varepsilon(1 + bg + \gamma - e + G + X) + \delta\,(M - \beta)}{\varepsilon(1 - b + bt + \sigma) + \alpha\delta}\right]^{\frac{1-k}{2}} K^{\frac{k(2-l)}{1+k}} \; (l_2 l)^{\frac{l(2-l)}{2(1+k)}} \qquad \dots (20)$$

ويمكن استخدام المعادلة الأخيرة في حساب مرونات الإنتاج بالنسبة لمتغيّرات السياسات المالية والنقدية المختلفة؛ ومن ثمَّ نحصل على :

$$\eta_{QG} = \frac{\partial Q}{\partial G} \cdot \frac{G}{Q} = \frac{1-k}{2} \frac{\varepsilon G}{RY} \quad \dots (21)$$

$$\eta_{Qt} = \frac{\partial Q}{\partial t} \frac{t}{Q} = -\frac{1-k}{2} \frac{b\varepsilon t}{R} \quad \dots (22)$$

$$\eta_{QM} = \frac{\partial Q}{\partial M} \frac{M}{Q} = -\frac{1-k}{2} \frac{\delta M}{RY} \quad \dots (23)$$

وطبقًا للمعادلات (21) ، (22) ، (23) يستجيب مستوى الإنتاج التوازني طبقًا لنمـوذج الأجر النقدي إلى التغيّرات في السياسة المالية والنقدية على العكس بالنسبة لنمـوذج الأجـر الحقيقي، وتـوضّح المعاملات أثر التغيّرات بمقدار واحد بالمائة على مستوى الإنتاج التوازني.

كما نحصل طبقًا لهذا النموذج على العلاقة الآتية :

$$L_e = \left[ll_2 \cdot \frac{\varepsilon(a + bg + \gamma - e + G + X) + \delta(M-\beta)}{\varepsilon(1 - b + bt + \sigma) + \alpha\delta} \right]^{\frac{1}{2}} \quad \dots (24)$$

ومن هذه المعادلة نحصل على :

$$\eta_{L_eG} = \frac{\partial L_e}{\partial G} \frac{G}{L_e} = \frac{\varepsilon G}{2RY} \quad \dots (25)$$

$$\eta_{L_et} = \frac{\partial L_e}{\partial t} \frac{t}{L_e} = \frac{-b\varepsilon t}{2R} \quad \dots (26)$$

$$\eta_{L_eM} = \frac{\partial L_e}{\partial M} \frac{M}{L_e} = \frac{\delta M}{2RY} \quad \dots (27)$$

وتوضِّح المعادلة (25) أن زيادة الإنفاق الحكومي بمقدار واحد بالمائة تؤدِّي إلى زيادة مستوى التوظف التوازني بمقدار $\frac{\varepsilon G}{2RY}$ بالمائة، بينما توضِّح المعادلة رقم (26) أن زيادة معـدّل الضريبة بمقدار واحد بالمائة تؤدِّي إلى نقص مستوى التوظف بمقدار $\frac{b\varepsilon t}{2R}$ بالمـائة. وتوضِّح المعادلة رقم (27) أن زيادة عرض النقود بمقدار واحد بالمائة تؤدِّي إلى زيادة مستوى التوظف بمقدار $\frac{\delta M}{2RY}$ بالمائة.

ومن معادلة الأجور (المعادلة رقم 95 في الفصل السابق) نحصل على :

$$W = \left(\frac{l}{l_2} \cdot \frac{\varepsilon(a + bg + \gamma - e + G + X) + \delta(M-\beta)}{\varepsilon(1 - b + bt + \sigma) + \alpha\delta}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \ldots (28)$$

ومن هذه المعادلة نحصل على المرونات الآتية بالنسبة للسياسات المالية والنقدية :

$$\eta_{WG} = \frac{\partial W}{\partial G} \quad \frac{G}{W} = \frac{\varepsilon G}{2RY} \quad \ldots (29)$$

$$\eta_{Wt} = \frac{\partial W}{\partial t} \quad \frac{t}{W} = \frac{-b\varepsilon t}{2R} \quad \ldots (30)$$

$$\eta_{WM} = \frac{\partial W}{\partial M} \quad \frac{M}{W} = \frac{\delta M}{2RY} \quad \ldots (31)$$

ويتَّضـح من هذه المعـادلات أن مرونـات مستـوى الأجـور بالنسبة لتغيّرات السياسـات المـالية والنقـدية تماثـل تمامًـا مرونـات مستوى التوظف التوازني بالنسبة للمتغيرات نفسها وذلك طبقًا لنموذج الأجر النقدي .

وأخيراً نحصل من المعادلة رقم (18) على مرونة المستوى العام للأسعار بالنسبة لمتغيّرات السياسات المالية والنقدية كالآتي :

$$\eta_{P.G} = \frac{\partial P}{\partial G} \; \frac{G}{P} = \frac{(1+k)\varepsilon G}{2RY} \qquad \dots (32)$$

$$\eta_{P.t} = \frac{\partial P}{\partial t} \; \frac{t}{P} = \frac{-(1+k)b\varepsilon t}{2R} \qquad \dots (33)$$

$$\eta_{P.M} = \frac{\partial P}{\partial M} \; \frac{M}{P} = \frac{(1+k)\delta M}{2RY} \qquad \dots (34)$$

وتـوضِّـح النتـائـج أعلاه أن درجة استجابة المستوى العام للأسعار لتغيّرات السياسات المالية والنقدية تفوق درجة استجابة التوظف والأجور طبقًا لنموذج الأجر النقدي .

(١٤ ـ ١ ـ ٣) نموذج الأجر الجامد (أو المحدَّد)

طبقًا لهذا النموذج نحصل من دراستنا السابقة على :

$$Q = K^k l^l W_0^{-l} Y^{1-k} \qquad \dots (35)$$

$$L_e = \frac{l}{W_0} \left(\frac{\varepsilon(a + bg + \gamma - \sigma + G + X) + \delta (M-\beta)}{\varepsilon(1 - b + bt + \sigma) + \alpha\delta} \right) \qquad \dots (36)$$

$$W = W_0 \qquad (37)$$

$$P = \left[\frac{\varepsilon(a + bg + \gamma - \sigma + G + X) + \delta (M-\beta)}{\varepsilon(1 - b + bt + \sigma) + \alpha\delta} \right]^k K^{-k} W_0^l l^{-l} \qquad \dots (38)$$

ومن هذه المعادلات نحصل على :

$$\eta_{Q.G} = \frac{\partial Q}{\partial G} \; \frac{G}{Q} = \frac{(1-k)\,\varepsilon\, G}{RY} \qquad \dots (39)$$

$$\eta_{Q.t} = \frac{\partial Q}{\partial t} \; \frac{t}{Q} = \frac{-(1-k)\,\varepsilon\, bt}{R} \qquad \dots (40)$$

$$\eta_{Q.M} = \frac{\partial Q}{\partial M} \; \frac{M}{Q} = \frac{(1-k)\,\delta\, M}{RY} \qquad \dots (41)$$

$$\eta_{L_e G} = \frac{\partial L_e}{\partial G} \; \frac{G}{L_e} = \frac{\varepsilon G}{RY} \qquad \dots (42)$$

$$\eta_{L_e.t} = \frac{\partial L_e}{\partial t} \; \frac{t}{L_e} = \frac{-b\varepsilon t}{R} \qquad \dots (43)$$

$$\eta_{L_e.M} = \frac{\partial L_e}{\partial M} \; \frac{M}{L_e} = \frac{\delta M}{RY} \qquad \dots (44)$$

$$\eta_{WG} = \eta_{Wt} = \eta_{WM} = 0 \qquad \dots (45)$$

$$\eta_{PG} = \frac{\partial P}{\partial G} \; \frac{G}{P} = \frac{k\varepsilon G}{RY} \qquad \dots (46)$$

$$\eta_{Pt} = \frac{\partial P}{\partial t} \; \frac{t}{P} = \frac{-kb\varepsilon t}{R} \qquad \dots (47)$$

$$\eta_{PM} = \frac{\partial P}{\partial M} \; \frac{M}{P} = \frac{k\delta M}{RY} \qquad \dots (48)$$

ويتَّضح من هذه المعادلات أنه طبقًا لهذا النموذج :

(i) لايتأثَّر معدّل الأجر النقدي (W) إذا حدث تغيّر في السياسة المالية أو النقدية [Friedman, 1958].

(ii) يستجيب مستوى الإنتاج التوازني لتغيّرات السياسة المالية والنقدية بدرجة أقل من تلك التي يستجيب بها مستوى التوظف التوازني.

(iii) يستجيب المستوى العام للأسعار لتغيّرات السياسة المالية والنقدية بدرجة أقل من درجة استجابة مستوى التوظف التوازني .

(iv) تكون درجة استجابة مستوى الإنتاج التوازني أكبر من درجة استجابة المستوى العام للأسعار إذا كانت $l > k$ ؛ أي إذا كانت مرونة الإنتاج بالنسبة للعمل أكبر من مرونته بالنسبة لرأس المال، والعكس صحيح [Tobin, 1955].

وبمقارنة النماذج الثلاثة يمكننا استنتاج الآتي :

(i) طبقًا للنموذج الأول لن يكون هناك تأثير للسياسة المالية أو النقدية على مستوى الإنتاج التوازني أو مستوى التوظف التوازني، وسوف ينتج عن زيادة الإنفاق الحكومي أو عرض النقود ارتفاع في المستوى العام للأسعار، ونقص في نصيب القطاع الخاص من الإنتاج الحقيقي .

(ii) تكون درجة استجابة مستوى الإنتاج التوازني ومستوى التوظف التوازني لتغيّرات السياسة المالية والنقدية أعلى في حالة جمود الأجور منها في الحالات الأخرى .

(iii) يستجيب المستوى العام للأسعار لتغيّرات السياسة المالية والنقدية بدرجة أكبر في حالة نموذج الأجر الحقيقي منه في حالتيْ النموذجين الآخرين .

(iv) يستجيب الأجر النقدي لتغيّرات السياسة المالية والنقدية بدرجة أكبر في حالة نموذج الأجر الحقيقي عنه في حالة نموذج الأجر النقدي .

(v) لا يتغيّر مستوى الأجر النقدي إذا حدثت تغيّرات في السياسة المالية أو النقدية وكان الاقتصاد يتّبع نموذج الأجر المجمّد أو المحدَّد.

(vi) لا يمكن أن توجد بطالة طبقًا لنموذج الأجر الحقيقي حيث إن الأسعار والأجور

تتميَّز بالمرونة الكاملة وعرض العمل يتحدَّد بالأجر الحقيقي بينما يتحدَّد الطلب عليه بالإنتاجية الحدِّية للعمل، فيتحدَّد الإنتاج في هذا النظام بعوامل حقيقية تتمثَّل في دالة الإنتاج وعرض العمل، ولا يكون للطلب الكلِّي أي دور سوى تحديد المستوى العام للأسعار ويمثِّل هذا النموذج إلى حدٍّ كبير اقتصادًا في حالة توظف كامل.

(vii) يتـأثَّر العمَّال طبقًا لنموذج الأجر النقدي بخداع النقود؛ ومن ثمَّ يتأثَّر عرض العمل بالأجر النقدي وليس بالأجر الحقيقي، وفي هذه الحالة سوف تؤثِّر تغيّرات الـطلب الكـلِّي ليس فقط في المستوى العام للأسعار وإنما في مستوى الإنتاج والتوظف أيضًا، غير أن مرونة الأسعار والأجور سوف تمنع حدوث البطالة، وسوف تؤدِّي زيادة تدخل الدولة في الاقتصاد إلى زيادة كل من الإنتاج والتوظف والأسعار.

(viii) يسمح النموذج الثالث بوجود البطالة، ويؤدِّي تدخل الدولة في الاقتصاد إلى تخفيض حجم البطالة وزيادة الأسعار والإنتاج. ويمثِّل هذا النموذج اقتصادًا في حالة كساد [Friedman, 1974].

غير أن النماذج الساكنة لا يمكن أن تعبِّر تعبيرًا صحيحًا عن السلوك الديناميكي للاقتصاد الواقعي؛ لهذا نحتاج إلى دراسة النظم الكلِّية الديناميكية، وسوف نتناول فيما بعد دراسة بعض هذه النماذج.

(١٤ ـ ٢) تضخم السحب الطلبي والدفع التكلفي

يسمَّى التضخم الذي ينتج عن انتقال منحنى الطلب الكلِّي بتضخم السحب الطلبي؛ فإذا كان الاقتصاد في حالة تقرب من التوظف الكامل فإن زيادة الطلب الكلِّي عادة ما تؤدِّي إلى ارتفاع الأسعار، فلو أخذنا نموذج الأجر الجامد الذي ناقشناه سابقًا

نجد أن المستوى العام للأسعار يتحدَّد طبقًا للمعادلة:

$$P_e = Y^k W_0^l l^{-l} . K^{-k} \qquad \ldots (1)$$

وهذه المعادلة تماثل المعادلة رقم (38) في الجزء السابق من هذا الفصل، ويتَّضح منها أن:

$$\frac{\partial P_e}{\partial Y} = k\, Y^{k-1} W_0^l L^{-l} K^{-k} > 0 \qquad \ldots (2)$$

أي أن زيادة الطلب الكلِّي تؤدِّي إلى ارتفاع في المستوى العام للأسعار التوازني (P_e) [Samuelson, 1960].

ويسمَّى التضخم الذي ينتج عن انتقال منحنى العرض الكلِّي يتضخَّم الدفع التكلفي، وينتج هذا التضخم عن وجود احتكارات في أسواق السلع أو العمل، وتزيد هذه الاحتكارات في أسواق السلع كلَّما بَعُدَ الاقتصاد عن حالة المنافسة الكاملة، فينخفض الأجر الحقيقي المدفوع للعمَّال نسبة إلى إنتاجيتهم الحدِّية أو:

$$\frac{W}{P} < \frac{\partial Q}{\partial L} \qquad \ldots (3)$$

فإذا كان عرض العمل يخضع لظروف المنافسة الكاملة فسوف تؤدِّي الاحتكارات في أسواق السلع إلى نقص مستوى التوظُّف التوازني مما يؤدِّي إلى انتقال منحنى العرض الكلِّي إلى اليسار (أي نقص العرض الكلِّي)، وهذا بدوره يؤدِّي إلى ارتفاع المستوى العام للأسعار التوازني إذا بقي الطلب الكلِّي على ما هو عليه.

كما يمكن أن تؤدِّي الاحتكارات في سوق العمل إلى حدوث تضخم دفع تكلفي، فالضغط من جانب نقَّابات العمَّال لزيادة الأجور سوف يؤدِّي إلى زيادة تكلفة الإنتاج، وهذه الزيادة في التكاليف سوف يتحملها المستهلك في النهاية كزيادة في الأسعار.

ويمكن توضيح تضخم الدفع التكلفي رياضيًا كالآتي:
نحصل من المعادلة رقم (1) على:

$$\frac{\partial P_e}{\partial W_0} = \left(\frac{Yl}{KW_0}\right)^k > 0 \qquad \dots (4)$$

ويتّضح من المعادلة رقم (4) أن أي زيادة في الأجر السائد سوف تؤدّي إلى ارتفاع المستوى العام للأسعار التوازني.

وحيث إنـه طبقًا لنموذج الأجر المحدَّد نحصل من المعادلة رقم (35) في الجزء السابق من هذا الفصل على:

$$Q = K^l l^l W_0^{-l} Y^{1-k} \qquad \dots (5)$$

فإننا نستطيع إيجاد التغيّر في مستوى الإنتاج التوازني نتيجة تغيّر الأجر السائد كالآتي:

$$\frac{\partial Q}{\partial W_0} = -(KY)^l \left(\frac{l}{W_0}\right)^{1+l} > 0 \qquad \dots (6)$$

ويتّضح من المعادلة رقم (6) أن ارتفاع مستوى الأجر السائد سوف يقلّل من مستوى الإنتاج التوازني [Kelly, 1981].

وهكذا فإن الضغط من جانب النقّابات لرفع مستوى الأجر السائد سوف ينتج عنه ارتفاع في الأسعار، وفي الوقت نفسه انخفاض في مستوى الإنتاج؛ ومن ثمَّ يكون تضخم الدفع التكلفي مصحوبًا بانخفاض في مستوى التوظف، أي يكون لدينا ارتفاع في الأسعار وفي الوقت نفسه زيادة في البطالة، فإذا حاولت الحكومة التدخل لمحاربة هذا النوع من التضخم فإن ذلك سوف ينتج عنه نقص في مستوى الإنتاج والتوظف

[Heathfied, 1971]. والسبب هو أن كلاً من المستوى العام للأسعار ومستوى الإنتاج التوازني يستجيب بالطريقة نفسها لتغيّرات السياسات المالية أو النقدية، فإذا حاولت الحكومة محاربة التضخم عن طريق تخفيض الإنفاق الحكومي أو زيادة معدّل ضريبة الدخل أو نقص كمية النقود المعروضة فإن هذا سوف يؤدِّي إلى تخفيض في مستوى الإنتاج التوازني وفي مستوى التوظف التوازني، كما يتَّضح من المعادلات أرقام (39) إلى (48) في الجزء السابق من هذا الفصل.

وإذا حاولت الحكومة استخدام سياساتها المالية والنقدية في محاربة البطالة فإن هذا سوف ينتج عنه زيادة في الطلب الكلِّي وبالتالي ارتفاع في الأسعار؛ ولهذا السبب يطلق عادة على هذا النوع من التضخم «تضخم الأجور والأسعار الحلزوني».

ويتَّضح ممَّا سبق أن تحقيق التوظف الكامل والاستقرار الاقتصادي في الوقت نفسه يتطلَّب من الحكومة استخدام أدوات جديدة غير أدوات السياسات المالية والنقدية. ويرى البعض أن إحدى هذه السياسات الجديدة لتحقيق الاستقرار الاقتصادي تتلخص في التأكد من أن الزيادة السنوية في الأجور تساوي (في المتوسط) الزيادة في الإنتاجية، ويعرف هذا الاقتراح باسم «إرشادات الأجور والأسعار»، غير أن النقَّابات عادة ما تعترض على استخدام مثل هذه السياسة [Samuelson, 1960].

(١٤ ـ ٣) ديناميكية التضخم والبطالة

تقوم النظرية الحديثة للتضخم على ثلاثة أعمدة رئيسة نوضِّحها فيما يلي:

(١٤ ـ ٣ ـ ١) نموذج كينز لمحددات الدخل القومي

ولقد ناقشنا بالتفصيل فيما سبق نموذج كينز لمحددات الدخل القومي والذي يتخلص في المعادلة السلوكية الخطية الآتية:

$$Y = a + b\,(Y - T) + \gamma + \delta\, i + G + X - IM \qquad \ldots (1)$$

ويمكن افتراض أن معدّل نمو الدخل القومي يتحدَّد نتيجة تغيّرات السياسة المالية والنقدية.

(١٤ - ٣ - ٢) منحنى فيلبس

يُعَبِّر هذا المنحنى عن العلاقة بين البطالة ومعدّل التغيّر في الأجر النقدي، وقد قام ببنائه الاقتصادي النيوزيلندي A. W. Phillips ولهذا سمي المنحنى باسمه [Phillips, 1958]، ويفترض المنحنى أن تغيّرات الأجر السائد تتبع تغيّرات نسبة البطالة أو:

$$W_0 = f(u) \qquad (2)$$

حيث:

W_0 = الأجر السائد

u = نسبة البطالة

ففي الفترات التي تسود فيها البطالة لا يضغط العمّال في محاولة لرفع معدّلات الأجور كما يفعلون في الفترات الحالية، كما أن أصحاب الأعمال لايقبلون رفع الأجور عندما تسود البطالة بسبب انخفاض معدّلات الأرباح، ومن ثمَّ فإن معدّل تغيّر الأجر السائد يرتبط بنسبة البطالة ارتباطًا عكسيًّا [Sargent, 1979]، ويمكن التعبير عن ذلك رياضيًّا كالآتي:

$$\frac{dW_0}{W_0} = \phi - \psi u \qquad \dots (3)$$

ويمكن تحديد أثر هذه العلاقة على مستوى الأسعار بتفاضل معادلة السعر طبقًا لنموذج الأجر المحدد، ومع افتراض عدم تغيّر الدخل (Y) ورصيد رأس المال (K) فإننا نحصل على:

$$P = Y^k W_0^l l^{-l} K^{-k}$$

$$dP = Y^k l^{-l} K^{-k} l dW_0$$

$$dP = \left(\frac{(Yl)^k}{K}\right) dW_0 \qquad \dots (4)$$

ومن هاتين المعادلتين نحصل على:

$$\frac{dP}{P} = l \frac{dW_0}{W_0} \qquad \dots (5)$$

وبالتعويض من المعادلة (3) في المعادلة (5) نحصل على:

$$\frac{dP}{P} = l(\phi - \psi u) \qquad \dots (6)$$

وتوضِّح المعادلة رقم (6) التبادل المقابل بين التضخم والبطالة، وهكذا نحصل من هذه المعادلة على:

(i) إذا كانت $\phi = \psi u$ فإن $\frac{dP}{P} = 0$

(ii) إذا كانت $\frac{dP}{P} = l\phi$ فإن $\psi u = 0$

أي أن تخفيض معدّل التضخم يكون على حساب زيادة نسبة البطالة، وعلى العكس من ذلك يكون تخفيض نسبة البطالة على حساب زيادة معدّل التضخم.

ومع ذلك فقد أصبح الآن معروفًا أن منحنى فيلبس ليس منحنى مستقرًّا، فالسياسات التي تهدف إلى تحقيق *انزحافًا* عليه (لاختيار نقطة تبادل مقابلة بين نسبة البطالة ومعدّل التضخم) تؤدِّي إلى حدوث انتقالات في المنحنى لأوضاع جديدة، ويتوقَّف وضع المنحنى على المعدّل المتوقع للتضخم، كما يتوقَّف معدّل البطالة على العلاقة بين المعدّل المتوقَّع للتضخم والمعدّل الحالي، ويعطي منحنى فيلبس قصير

الأجـل التبـادل المقـابل قصير الأجل بين التضخم والبطالة، بافتراض معدّل معيّن للتضخم يمكن توقعه، ويحدث *الانزحاف* على منحني فيلبس فقط إذا حدثت تغيّرات في المعدّل *الفعلي* للتضخم مع بقاء المعدّل *المتوقع* للتضخم على ما هو عليه، غير أنه لابد من حدوث تكييف في الأجل الطويل، فإذا استمر أي معدّل للتضخم في الوجود لفترة طويلة فإنه يصبح معدلاً للتضخم متوقعًا.

ويطلق على معدّل البطالة الذي يسود عندما يتساوى معدّل التضخم الفعلي مع معدّل التضخم المتوقع «معدل البطالة الطبيعي»، ويتّبع ذلك أن منحنى فيلبس طويل الأجل يكون خطًّا رأسيًّا عند معدّل البطالة الطبيعي.

فلو رمزنا لمعدّل التضخم الفعلي بالرمز $\dot{P}$، ورمزنا لمعدّل التضخم المتوقَّع بالرمز $\dot{P}_e$، ورمزنا لمعدّل البطالة الفعلي بالرمز u، ولمعدّل التضخم الطبيعي بالرمز u_n فإننا نحصل على:

$$\dot{P} = \dot{P}_e \quad \text{عندما} \quad u = u_n \qquad \dots (7)$$

وهكذا يمكن صياغة منحنى فيلبس كالآتي:

$$\dot{P} = \dot{P}_e + \lambda\,(u - u_n) \qquad \dots (8)$$

حيث λ تمثّل ميل المنحنى.

فإذا افـترضنـا أن المعـدّل المتـوقّـع للتضخم في كل عام يسـاوي معـدّل التضخم الفعـلي في العـام السـابق، أي إذا افـترضنـا قاعـدة توقـع ملائمـة [Maddock & Carter, 1982 and Minferd & Poel, 1983] فإننا نحصل على:

$$\dot{P}_{et} = \dot{P}_{t-1} \qquad \dots (9)$$

وبالتعويض من المعادلة رقم (8) في المعادلة رقم (9) نحصل على:

$$\dot{P}_t = \dot{P}_{t-1} + \lambda\,(u_t - u_n); \quad f > 0 \qquad \dots (10)$$

(١٤ ـ ٣ ـ ٣) قانون أوكون

يعطي هذا القانون علاقة بين معدّل النمو الحقيقي للناتج القومي ومعدّل التضخم، وطبقًا لهذه العلاقة ينمو الناتج القومي الكامن نتيجة نمو السكان ونمو التوظف ونمو إنتاجية العامل، ويتلخص قانون أوكين في أن نقص معدّل البطالة بواحد بالمائة يتطلب زيادة في معدّل النمو الحقيقي للناتج القومي بأكثر من واحد بالمائة، فإذا زاد معدّل نمو الناتج الفعلي فإن هذه الزيادة سوف تخلق وظائف جديدة ليس للعمّال العاطلين فقط، وإنما للعمّال الجدد الذين يدخلون القوى العاملة لأول مرة أيضًا، ويمكن صياغة هذا القانون رياضيًا فيما يلي:

$$\dot{Q}_t = g - h\,(u_t - u_{t-1}) \qquad \ldots (11)$$

حيث:

$\dot{Q}_t$ = معدّل النمو الحقيقي للناتج القومي في الفترة t

g = معدّل نمو الناتج الكامن

h = نسبة التغيّر في البطالة: $0 < h < 1$

u_t = نسبة البطالة في الفترة t

ويتّضح من المعادلة رقم (11) أنه إذا كانت $\dot{Q}_t = g$ فإن $u_t = u_{t-1}$؛ أي أن نسبة البطالة لا تتغيّر طالما أن الناتج القومي الحقيقي الفعلي يتبع المسار نفسه كالناتج الحقيقي الكامن [Teigen, 1978].

كما أنه من الواضح أن معدّل النمو الإسمي للإنتاج يساوي معدّل النمو الحقيقي للإنتاج، إذا كان معدّل التضخم يساوي صفرًا ويمكن اشتقاق هذا من العلاقة.

$$\dot{Y}_t = \dot{Q}_t + \dot{P}_t \qquad (12)$$

حيث:

$\dot{Y}_t$ = معدّل النمو الإسمي للناتج القومي

$\dot{P}_t$ = معدّل التضخم

أي أن معدّل النمو الإسمي يساوي معدّل النمو الحقيقي بالإضافة إلى معدّل التضخم [Okun, 1979].

وبالتعويض من المعادلة رقم (12) في المعادلة رقم (11) نحصل على :

$$\dot{Y}_t = g - h\,(u_t - u_{t-1}) + \dot{P}_t \qquad (13)$$

أو:

$$\dot{P}_t = \dot{Y}_t - g + h\,(u_t - u_t) \qquad (14)$$

وطبقًا للمعادلة الأخيرة سوف يكون معدّل التضخم في الفترة t مساويًا لمعدّل النمو الإسمي مطروحًا منه معدّل نمو الناتج الكامن، ومضافًا إليه نسبة التغيّر من كل زيادة قدرها نسبة مئوية واحدة في معدّل البطالة على مستواه في الفترة t − 1 [Smith, 1975]. ويطلق أحيانًا على المعادلة رقم (14) اسم «معادلة الضغط الطلبي»؛ حيث إنها توضّح مقدار الضغط الذي يوضع على معدّل التضخم نتيجة زيادة الطلب الإسمي، وبافتراض معدّل بطالة معيّن؛ فإذا لم يحدث أي تغيّر في معدّل البطالة ($u_t = u_{t-1}$) فإن :

$$\dot{P}_t = \dot{Y}_t - g$$

أي أن معدّل التضخم في الفترة t يساوي معدّل النمو الإسمي للناتج القومي ناقصًا معدّل نمو الناتج الحقيقي الكامن [Okun, 1981].

ونستطيع الآن أن نحدِّد معدّل التضخم المقابل لكل معدّل بطالة، وذلك بحلّ معادلة منحنى فيلبس الديناميكية (رقم 10)، ومعادلة قانون أوكن رقم (14) حلاًّ *آنيًّا*، حيث تمثِّل الأولى منحنى العرض، بينما تمثِّل الثانية منحنى الطلب، ونحصل من الحل *الآني* لهاتين المعادلتين على :

$$\dot{P}_t = \frac{\begin{vmatrix} \dot{P}_{t-1} - \lambda u_n & -\lambda \\ Y_t - g - hu_{t-1} & -h \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} l & -\lambda \\ l & -h \end{vmatrix}} \qquad \ldots(15)$$

وتعطي المعادلة الأخيرة :

$$\dot{P}_t = \frac{\lambda(Y_t - g - hu_{t-1}) - h(\dot{P}_{t-1} - \lambda u_n)}{\lambda - h} \qquad \ldots(16)$$

كما نحصل على :

$$u_t = \frac{\begin{vmatrix} l & \dot{P}_{t-1} - \lambda u_n \\ l & \dot{Y}_t - g - hu_{t-1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} l & -\lambda \\ l & -h \end{vmatrix}} \qquad \ldots(17)$$

وتعطي هذه المعادلة الأخيرة :

$$u_t = \frac{(\dot{Y}_t - g - hu_{t-1}) - (\dot{P}_{t-1} - \lambda u_n)}{\lambda - h} \qquad \ldots(18)$$

وباستخدام المعادلتين (16) ، (18) يمكننا أن نحدِّد بسهولة أثر تغيّرات السياسات المالية والنقدية على معدّل التضخم والبطالة ؛ غير أننا سوف نحتاج إلى استخدام أسلوب الاقتصاد القياس في تحديد قيم λ (التي تمثِّل ميل منحنى فيلبس)، g (التي تمثِّل معدّل نمو الناتج الحقيقي الكامن)، h (التي تمثِّل التغيّر في معدّل البطالة الذي يقابل كل زيادة في الناتج القومي قدرها نسبة مئوية واحدة)، وقيمة u_n (التي تمثِّل

معدّل التضخم الطبيعي) [Stein, 1982 and Turnovsky, 1977].

(١٤ - ٤) تمرينـــات

١) احسب من المعلومات الآتية معدّل التضخم ومعدّل البطالة في السنة الحالية :

(i) معدّل البطالة في سنة الأساس (t_0) يساوي معدّل البطالة الطبيعي = 5%.

(ii) معدّل النمو الإسمي يساوي معدّل النمو الحقيقي في سنة الأساس = 3%.

(iii) استخـدمت أدوات السياسة المالية والنقدية في تحقيق زيادة في معدّل النمو الإسمي بمقدار 4% في السنة الحالية .

٢) افترض في المشكلة السابقة أن السلطات المالية والنقدية رغبت في الإبقاء على معدّل النمو الإسمي مساويًا 7% في السنة الثانية ، ثم تخفيضه إلى مستواه الأصلي (3%) في السنة الثالثة . احسب التغيّرات التي تحدث في معدّل التضخم ومعدّل البطالة .

٣) بافتراض معالة العرض الكلّي :

$$P = Q^3$$

وبافتراض مرونات الطلب الكلّي الآتية :

$$\eta_{Y.M} = \frac{1}{2}$$

$$\eta_{Y.G} = 2$$

حدِّد مدى تأثير السياسات المالية والنقدية على مستوى الإنتاج .

المراجع

أولاً: المراجع العربية

إبراهيم، عبدالرحمن زكي. *مقدمة في الاقتصاد الرياضي*. الإسكندرية: دار الجامعات المصرية، ١٩٧٩م.

العيسوي، إبراهيم. *مبادىء التحليل الاقتصادي الرياضي*، الطبعة الثانية. القاهرة: دار النهضة العربية، ١٩٨٢م.

الليثي، محمد علي وسيفين، لطفي لونر. *أصول الاقتصاد الرياضي*. الإسكندرية: دار الجامعات المصرية، ١٩٨٢م.

علي، محمد فتحي وعبدالبديع، فريد الحسيني. *مقدمة في الاقتصاد الرياضي*. القاهرة: مكتبة عين شمس، ١٩٦٩م.

ثانيًا: المراجع الأجنبية

Allen, R.G.D. *Macroeconomic Theory : A Mathematical Approach*. New York: St. Martin's Press, Inc., 1967.

—— *Mathematical Analysis for Economists*. London: Macmillan, 1976.

Anderson, W.H.L. *National Income Theory and its Price Theoretical Foundation*. New York: Mc Graw Hill, 1979.

Ando, A. and Modigliani, F. "The Life Cycles Hypothesis of Saving : Aggregate Implications and Tests." *The American Economic Review,* March (1963), 55-84.

Archibald, G.D. and Lipsey, R.G. *An Introduction to a Mathematical Treatment of Economics,* 3rd ed. Stanford: Stanford University Press, 1977.

Arrow, K.J.; Karlin, S. and Suppes, P. (Ed.) *Mathematical Methods in the Social Sciences.* Stanford: Stanford University Press, 1960.

Baumol, W.J. *Economic Theory and Operations Analysis.* Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc. 1976.

Boulding, K.E. and Spivey, W.A. (Eds.) *Linear Programming and the Theory of the Firm.* New York: The Macmillan Co., 1960.

Bowers, D.A. and Bird, R.N. *Elementary Mathematical Macroeconomics.* Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1971.

Brems, H. *Quantitative Economic Theory, a Synthetic Approach.* New York: John Wiley and Sons, 1968.

Bruckmann, G. *Input-Output Approaches in Global Modelling.* New York: Pergamon Press, 1980.

Chamberlin, E.H. *The Theory of Monopolistic Competitien.* Cambridge: Harrard University Press, 1933.

Chiang, A.C. *Fundamental Methods of Mathematical Economics,* 2nd ed. New York: Mc-Graw Hill Book Co., 1974.

Cobb, C.W. and Doulgas, P.H. "A Theory of Production." *The American Economic Review,* Supp. Vol. 18 (1928).

Currie, D. Rell, and Peters, W. (Ed.) *Microeconomic Analysis.* London: Croom Helm Ltd., 1981.

Cyert, R.M. and March, J.G. *A Behavioral Theory of the Firm.* Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1963.

Denburg, T.F. and Denburg, J.D. *Macroeconomic Analysis,* London: Adison Wesley, 1969.

Dhrymes, P.J. "Some Extensions and Tests for the C.E.S. Class of Production Functions." *The Review of Economics and Statistics,* Nov. (1965).

Dolan, E. *Basic Macroeconomics.* New York: Mc Graw-Hill Book Co., 1980.

Dorfman, R.; Samuelson, P.A. and Solow, R.M. *Linear Programming and Economic Analysis.* New York: Mc-Graw Hill Book Company, 1958.

Duesenberry, J. *Income, Saving and Theory of Consumer Behaviour.* Cambridge: Harvard University Press, 1949.

Eatwell, J. and Milgate, M. (Ed.) *Keynes's Economics and the Theory of Value and Distribution.* London: Gerald Duckworth Co., Ltd., 1983.

Farrel, M.J. "The New Theories of the Consumption Function." *The Economic Journal,* December (1959), 378-396.

Friedman, M. *A Theory of The Consumption Function.* Princeton: The National Bureau of Economic Research, 1957.

—— "The Role of Monetary Policy." *The American Economic Review,* March (1958), 1-17.

—— "Unemployment Versus Inflation." *Institute for Economic Affairs,* Occasional paper No. 44, London (1974).

Glahe, F. *Macroeconomics, Theory and Policy,* 2nd ed. New York: Harcourt Brace, Jovanovich, Inc., 1977.

Gordon, R.J. *Macroeconomics.* Boston: Little Brom, 1978.

Harrod, R.F. *Towards A Dynamic Economics.* London: Macmillan & Co., 1949.

Heathfied, D.F. *Production Functions.* London: The Macmillan Press Ltd., 1971.

Henderson, J.M. and Quandt, R.E. *Microeconomic Theory : A Mathematical Approach,* 2nd ed. New York: Mc-Graw Hill Book Company, 1971.

Henry, S.G.B. *Elementary Mathematical Economics.* London: Routledge & kegan Paul, 1964.

Hicks, J.R. "Mr. Keynes and the 'Classics' : A Suggested Interpretation." *Econometrica,* 5 (1937), 147-159.

—— *A Contribution to the Theory of Trade Cycle.* Oxford: oxford University Press, 1950.

Hildenbrand, W. *Advances in Economic Theory.* Cambridge: Cambridge University Press, 1982.

Huang, D.S. *Introduction to the Use of Mathematics in Economic Analysis.* N.Y.: John Wiley & Sons, Inc., 1965.

Intriligator, M.D. *Mathematical Optimisation and Economic Theory.* Englewood Cliffe, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1971.

Johnson, S.R.; Hassan, Z.A. and Green, R.D. *Demand Systems Estimation : Methods and Applications.* Iowa: The Iowa State University Press, 1984.

Kelly, W.A. (Jr.) *Macroeconomics.* New York: Prentice-Hall, Inc., 1981.

Kennedy, E. *Macroeconomics,* 3rd ed. London: Allyn and Bcon, Inc., 1984.

Keynes, J.M. *The General Theory of Employment, Interest and Money.* New York: Harcourt Brace & World, Inc., 1936.

Kogiku, K.C. *An Introduction to Macroeconomic Models.* New York: Mc-Graw Hill Company, 1968.

Koopmans, T.C. (Ed.) *Activity Analysis of Production and Allocation*. New York: John Wiley and Sons, 1957.

Korliras, P.G. and Thorn, R.S. (Eds) *Modern Macroeconomics*. New York: Harper & Row, 1979.

Koytsoyiannis, A. *Non-Price Decisions*. Hong Kong: St. Martin's Press, 1982.

Lancaster, K. *Mathematical Economics*. New York: The Macmillan Company, 1968.

Leontief, W.W. *The Structure of The American Economy : 1919-1939*. New York: Oxford University Press, 1951.

Maddock, R. and Carter, M. "A Child's Guide to Rational Expectations." *Journal of Economic Literature*, (1982), 32-46.

Marshall, A. *Principles of Economics*. London: Macmillan and Co., 1980.

McKenna, J.P. *Aggregate Economic Analysis*. New York: Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1974.

Menderdhausen, H. "On the Significance of Professor Douglas' Production Function." *Econometrica*, 6, (1938).

Metweally, M.M. *Mathematical Formulation of Microeconomics*, London: Asia Publishing Co., 1974.

—— *Price and Non Price Competition*. London: J.K. Publishers, 1975.

—— "Towards a Marketing Promotion Function." *Industrial Marketing Management*, 3, March (1974).

Metwally, M.M.; Tamaschke, H.U. and West, G.R. *Operations Research: Theory and Applications*. London: J.K. Publishers, 1981.

Metwally, M.M. and Tamaschke, H.U. "Advertising and the Propensity to Consume." *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 43, No. 3, August (1981), 273-285.

—— "The Effect of Inflation on the Patterns of Consumption." *The Indian Economic Journal*, 32, No. 1, July-September (1984), 81-93.

Mills, G. *Optimisation in Economic Analysis*. Sydney: George Allen & Unwin, 1984.

Minford, P. and Poel, D. *Rational Expectations and the New Macroeconomics*. Oxford: Marfin Robertson, 1983.

Modigliani, F. and Ando, A. "Tests of The Life-Cycle Hypothesis of savings." *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 19 (1960).

Musgrave, R.A. *The Theory of Public Finance*. New York: Mc Graw-Hill Book Company, Inc., 1959.

Naylor, T.H. and Veron, J.M. *Microeconomics and Decision Models of the Firm*. New York: Harcourt, Brace & World Inc., 1969.

Nelson, R.R. "Aggregate Production Functions." *The American Economic Review*, Sept. (1964), 575-606.

Okun, A.M. "An Efficient Strategy to Combat Inflation." *Brookings Bulletin*, No. 15, Spring (1979).

—— *Prices and Quantities: A Macroeconomic Analysis.* Washington: The Brookings Institution, 1981.

Ott, D.J., Ott, A.F. and Yoo, J.H. *Macroeconomic Theory.* New York: McGraw Hill. 1975.

Patinkin, D. *Money. Interest and Prices,* 2nd ed. New York: Harper and Row, 1965.

Phelps, E.S. *et al. Microeconomic Foundations of Employment and Inflation Theory.* New York: W.W. Norton & Company, 1970.

Phillips, A.W. "The Relation Between Unemployment and the Rate of Change of Money Wage Rate in the United Kingdom, 1861-1957." *Economica,* November (1958).

Rosenmuller, J. *The Theory of Games and Markets.* New York: North Holland, 1981.

Sage, A.P. *Economic System Analysis.* New York: North Holland, 1983.

Salant, W.A. "Taxes, Income Determination and the Balanced Budget Theorem." *The Review of Economics and Statistics,* May (1957), 152-61.

Samuelson, P.A. "Interaction Between the Multiplier and the Principle of Acceleration." *The Review of Economics and Statistics,* May (1939), 75-78.

—— "The Simple Mathematics of Income Determination." in *Income, Employment and Public Policy,* New York: W.W. Norton & Company, 1948.

Samuelson, P.A. *Foundation of Economic Analysis.* Cambridge, Mass: Harvard University Press, 1948.

—— "Analytical Aspects of Anti-Inflation Policy." *The American Economic Review*, May (1960), 177-94.

Sargent, T.J. *Macroeconomic Theory.* New York: Academic Press, 1979.

Sato, K. *Production Functions and Aggregations.* New York: North Holland, 1975.

Shapiro, E. *Macroeconomic Analysis,* 5th ed. New York: Harcourt and Brace Jovanovich, 1982.

Shephard, R.W. *Theory of Cost and Production Functions.* Princeton, New Jersey, Princeton University Press, 1970.

Shone, R. *Issues in Macroeconomics.* Oxford: Martin Roberts 1984.

Sinclair, P.J.N. *The Foundations of Macroeconomic and Monetary Theory.* Oxford: Oxford University Press, 1983.

Smith, G. "Okun's Law Revisted." *Quarterly Review of Economics and Business.* (1975), 37-54.

Solow, R.M. "Technical Change and the Aggregate Production Function." *The Review of Economics and Statistics,* August (1957), 312-20.

—— *Capital Theory and the Rate of Return.* Amsterdan: North Holland Publishing Company, 1963.

Stein, J.L. *Monetarist, Keynesian and New Classical Economics.* London: Basil Blackwell, 1982.

Teigen, R.L. *Readings in Money, Natural Income and Stabilisation Policy,* 4^{th} ed. Irwin: Homewood, III, 1978.

Theil, H. *Studies in Theory and Measurement of Consumer Demand,* 2 Vols. New York: North Holland, 1976.

—— *The System-Wide Apporach to Microeconomics.* Chicago: University of Chicago Press, 1980.

Thomas, V.B. *Input-Output Analysis in Developing Countries.* New York: John Wiley & Sons, 1982.

Tobin, J. "A Dynamic Aggregate Model." *Journal of Political Economy,* April (1955), 103-115.

Turnovsky, S.J. *Macroeconomic Analysis and Stabiliz Policy.* New Delhi: S. Chand & Co., Ltd., 1977.

Wismer, D.A., and Chattergy, R. *Introduction To Nonlinear Optimisation.* New York: North Holland, 1978.

Wu, S. and Pontney, J.A. *An Introduction To Modern Demand Theory.* New York: Random House, 1967.

Zellner, A. "The Short-Run Consumption Function." *Econometrica.* October (1957), 552-67.

Zeuthen, F. *Economic Theory and Method.* Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1955.

كشاف الموضوعات

ن

ردمك ٩٩٦٠-٠٥-٠٤٢-٤